Corso di dottorato — <u>Algebre di Hecke</u> — 2023 – 2024

Introduzione

Gruppi di matrici e altri oggetti collegati:

k = campo, es. $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q$ con $q = p^s$ e p primo, $\mathbb{Q}_p$, ecc...$\}$

$$GL(n) = GL(n, k), \quad SL(n), \quad O(n), \quad SO(n), \quad Sp(2n), \quad \underset{\cap}{U(n)}, \text{ ecc...}$$

$U(n) \subseteq GL(n, \mathbb{C})$

Le loro strutture, proprietà, rappresentazioni, ecc. si studiano usando molti altri oggetti algebrici e geometrici.

Es.: 1) $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ sottogruppo chiuso $\rightsquigarrow$ $Lie(G)$ = l'algebra di Lie di G

(= lo spazio tangente a G nella matr. identità, è ben def. perché G è in realtà una sottovarietà diff. immersa in $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.)

2) $S_n \cong \{$matrici di permutazione$\} \subseteq GL(n)$

↑ gruppo finito, presentato per generatori e relazioni:

gen. $s_i = (i \ \ i{+}1)$ ← trasposizione $\qquad i \in \{1, .., n-1\}$

rel. $s_i^2 = e$, $\quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \qquad \forall i \in \{1, .., n-2\}$

$s_i s_j = s_j s_i \qquad$ se $|i-j| \geq 2$

Storicamente, molti di questi oggetti si sono affrancati dai gruppi e hanno trovato applicazioni importantissime in altri campi della matematica (è successo con le algebre di Lie e con i gruppi di Weyl / Coxeter).

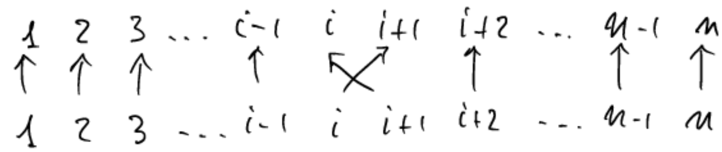
Le algebre di Hecke sono uno di essi, e hanno un ruolo fondamentale per:

- gruppi delle trecce
- teoria dei nodi e dei link
- teoria dei numeri (es. studio di gruppi top. localmente compatti)
- rappr. di gruppi finiti
- quantum groups
- teoria delle rappr. modulare (i.e. in caratt. positiva)

ecc...

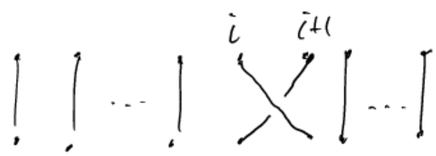
Per questo sono uno degli „oggetti fondamentali" in teoria delle rappr..

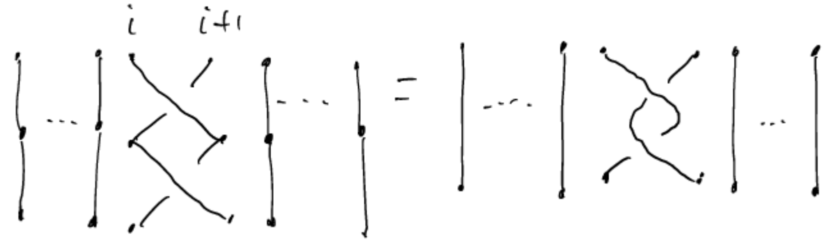
Esempio: $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ;\ s_i^2 = e,\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},\ s_i s_j = s_j s_i \rangle$

$s_i =$ 

B_n = gruppo delle trecce $= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid$ come prima, senza $\sigma_i^2 = e \rangle$

$\sigma \in B_n \rightsquigarrow$ treccia „geometrica" 

$\sigma_i =$ 

qui $\sigma_i^2 =$  $\neq e$

Ogni treccia (geometrica) induce naturalmente una permutazione, e questo corrisponde all' omom. suriettivo

$$\begin{aligned} B_n &\longrightarrow S_n \\ \sigma_i &\longmapsto s_i \end{aligned}$$

In un certo senso uno degli esempi più importanti di algebre di Hecke è „fra B_n e S_n" quindi informalmente:

$$GL(n) \qquad S_n \qquad \overset{\text{alg. di H.}}{\vee} \qquad B_n$$

Algebra gruppo e primo esempio di alg. di Hecke

Def.: Siano G un gruppo e R un anello (comm. unit.). L'<u>algebra gruppo</u> RG di G su R è l'insieme delle combinaz. lin. formali di elem. di G a coeff. in R:

$$RG = \left\{ a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ g_i \in G,\ a_i \in R \right\}$$

È un R-modulo$^{(*)}$ (in modo ovvio) e un anello con moltiplicaz.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j h_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j g_i h_j$$

(*) se R è un campo allora RG è uno sp. vett.

(Questo rende RG una <u>R-algebra</u>.)

<u>Oss.</u>: 1) Possiamo vedere RG come sottosp. vett. di

$$R^G = \{ f : G \to R \}$$

interpretando $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ come $f : G \to R$

g_i supp. distinti

$$g \longmapsto \begin{cases} a_i & \text{se } g = g_i \text{ per un } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e otteniamo $RG = \{ f : G \to R \mid f(g) \neq 0$ per un numero <u>finito</u> di el. di $g \}$

2) Di solito qui si suppone G gruppo finito.
Con G infinito si considerano più spesso altri sottosp. di R^G, es.

$C^0(G, k)$ se G è un gruppo topologico e $R = k =$ campo topol.

$k[G]$ se G è una var. algebrica su $R = k$ campo

ecc...

<u>Esercizio</u>: La moltiplicaz. in RG vista in R^G è la <u>convoluzione</u>:
$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{x \in G} f_1(x) f_2(x^{-1}g)$$

(Att.: è definita su RG come sottosp. di R^G, ma se G è infinito non è def. su tutto R^G.)

Oss.: Se $R = k$ campo, le rappr. di G su k (cioè gli omom. di gruppi $G \to GL(V)$ con V sp. vett. su k) corrispondono alle rappr. di kG come algebra associativa unitaria (cioè gli omom. di anelli unitari $kG \to \mathrm{End}(V)$ che sono anche appl. lineari), perché:

$kG \to \mathrm{End}(V)$ si restringe a $G \to GL(V)$,

$G \to GL(V)$ si estende (in modo unico) a $kG \to \mathrm{End}(V)$.

Esempio: $R = \mathbb{C}$, ma consid. $\mathbb{F}_q$ campo finito con $q = p^s$ elem., p primo, e il gruppo $G = GL(n, q) = GL(n, \mathbb{F}_q)$.

Consid. un sottoanello di $\mathbb{C}G$, legato a

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad W = \{\text{matrici di permutaz. in } G\} \cong S_n$$

Algoritmo di Gauss $\Rightarrow$ ogni matrice di G si scrive come prodotto $U_1 w U_2$ con $U_i \in B$, $w \in W$, cioè:

$$GL(n, q) = \bigcup_{w \in W} BwB \qquad (*)$$

B e W sono importantissimi per studiare G

(ci sono analoghi anche per $SO(n)$, $Sp(n)$, ecc...)

ad es. $(*)$ fornisce una decomp. di

$$G/B = \{\text{bandiere complete in } k^n\}$$
$$\| $$
$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = k^n, \ \dim(V_i) = i$$

come $G/B = \bigcup_{w \in W} BwB$ (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ questo fornisce una decomp. cellulare della var. delle bandiere)

È abbastanza naturale studiare gli elem. di $\mathbb{C}G$ costanti sui sottoinsiemi del tipo BwB (che in G/B si chiamano celle di Schubert). Si tratta di funzioni $f: G \to \mathbb{C}$ tali che $f(bgb') = f(g) \ \forall b, b' \in B$.

Denotiamo con $(\mathbb{C}G)^{B \times B}$ il sottoanello di queste funzioni; osserviamo che $(\mathbb{C}G)^{B \times B}$ ha per base (come sp. vett.) le funzioni caratteristiche χ_{BwB} dei sottoinsiemi BwB di G.

E' anche conveniente normalizzare la convoluzione usando B:

$$(f_1 * f_2)(g) = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in G} f_1(x) f_2(x^{-1}g)$$

perché in questo modo la funzione caratteristica χ_B di B in G è unità di questo sottoanello:

se $f \in (\mathbb{C}G)^{B\times B}$ allora

$$(\chi_B * f)(g) = \frac{1}{|B|} \sum_{\substack{u,v\in G\\ uv=g}} \overbrace{\chi_B(u)}^{\substack{1 \iff u\in B\\ \parallel}} f(v) =$$

$$= \frac{1}{|B|} \sum_{\substack{u\in B\\ v=u^{-1}g}} 1 \cdot \underbrace{f(u^{-1}g)}_{\substack{\parallel\\ f(g)}} = f(g)\cdot \frac{1}{|B|}\cdot |B| = f(g).$$

Ad es. se $n=2$ abb.: $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{=e}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = s \right\}$,

$$G = GL(2) = B \cup BsB$$

e possiamo calcolare i prodotti degli elem. di questa base di $(kG)^{B\times B}$:

$$\chi_B * \chi_B = \chi_B, \qquad \chi_B \chi_{BsB} = \chi_{BsB},$$

$$\chi_{BsB} * \chi_{BsB} = \,?$$

Abb.: $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \;\middle|\; a,d \neq 0 \right\}$, $|B| = (q-1)^2\cdot q$

q-1 scelte per a, d; q scelte per b

$$(\chi_{BsB} * \chi_{BsB})(g) = \eta\cdot \chi_B + \xi\,\chi_{BsB} \qquad \text{per qualche } \eta, \xi \in \mathbb{C}.$$

Per trovare η, ξ calcoliamo $\chi_{BsB} * \chi_{BsB}$ in $e \in B$ e in $s \in BsB$:

$$(\chi_{BsB} * \chi_{BsB})(e) = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in G} \chi_{BsB}(x)\chi_{BsB}(x^{-1} \cdot e) =$$

$$= \frac{1}{|B|} \sum_{\substack{x \in G \\ x \in BsB \\ x^{-1} \in BsB}} 1 = \dots$$

D'altronde $x \in BsB \iff x \notin B \overset{B \text{ è sgr}}{\iff} x^{-1} \notin B \iff x^{-1} \in BsB$

Contiamo gli elem. di BsB: ogni elem. di B si scrive in modo unico come $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha, \delta \in \mathbb{F}_q^*$, $\beta \in \mathbb{F}_q$ (esercizio).

Inoltre $x \, s \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{b \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{\in B} s \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Esercizio:</u> $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

è una <u>biiezione</u> $B \times \mathbb{F}_q \longrightarrow BsB$.

<u>Svolgim.:</u> $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} b & a + b\beta \\ d & d\beta \end{pmatrix} \Leftarrow$ da questa ricavo b, d,

allora anche β e poi anche a.

Quindi BsB ha $(q-1)^2 \cdot q \cdot q$ elementi. Segue:

$$\dots = \frac{1}{\cancel{(q-1)^2}\cdot\cancel{q}} \cdot \cancel{(q-1)^2}\cdot\cancel{q}\cdot q = \boxed{q = \eta}$$

Infine

$$(\chi_{BsB} * \chi_{BsB})(s) = \frac{1}{|B|}\sum_{x\in G} \chi_{BsB}(x)\,\chi_{BsB}(x^{-1}\cdot s) =$$

$$= \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{x\in BsB \\ x^{-1}s\in BsB}} 1 = \dots$$

Ora contiamo gli x nella sommatoria:

$$x\in BsB \Rightarrow x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b & a+b\beta \\ d & d\beta \end{pmatrix}$$

$$x^{-1}s = \frac{1}{\det(x)} \cdot \begin{pmatrix} d\beta & -a-b\beta \\ -d & b \end{pmatrix} s =$$

$$= \frac{1}{\det(x)} \cdot \begin{pmatrix} -a-b\beta & d\beta \\ b & -d \end{pmatrix}$$

E' in BsB se e solo se non è in B, cioè se e solo se $b\neq 0$. Gli elem. di BsB che soddisfano questa condizione sono $(q-1)^2\cdot(q-1)\cdot q$, quindi

$$\dots = \frac{1}{\cancel{(q-1)^2}\cdot\cancel{q}} \cdot \cancel{(q-1)^2}\cdot(q-1)\cdot\cancel{q} = \boxed{q-1 = \xi}$$

cioè

$$\chi_{BsB} * \chi_{BsB} = q \cdot \chi_B + (q-1)\chi_{BsB}$$

Il conto si può fare anche con n più grande, e si ottiene:

base di $(\mathbb{C}G)^{B\times B}$ formata da $T_w = \chi_{BwB}$, $w \in W$,

e i prodotti soddisfano:

1) $T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}}$ $\quad \forall i$

2) $T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i}$ $\quad$ se $|i-j| \geq 2$

3) $T_{s_i}^2 = q\, T_e + (q-1) T_{s_i}$ $\quad \forall i$

Oss. che $T_{s_i}^2 - (q-1)T_{s_i} = q\, T_e$ ← unità dell'anello

$$T_{s_i}\left(T_{s_i} - (q-1)T_e\right) = q\, T_e$$

da cui T_{s_i} è invertibile con inversa $\frac{1}{q}T_{s_i} - \frac{(q-1)}{q}T_e$.

Queste relazioni sono quelle che definiscono le algebre di Hecke!

Oss.: Se interpretiamo q come „variabile formale invertibile", abb. il vantaggio di considerare tutti i campi finiti „contemporaneamente", e anche di interpretare questo anello „fra B_n e S_n".

Più precisamente si può prendere $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ e

H_n la R-algebra generata da simboli $T_1, \dots, T_{n-1}$ con relaz. 1), 2), 3). Allora abb. omom. suriettivi di algebre

$$\begin{array}{ccccc} R B_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & \mathbb{Z} S_n \\ \sigma_i & \longmapsto & T_i & \longmapsto & s_i \end{array}$$

$$\underbrace{T_i \longmapsto s_i}_{\text{e } q \mapsto 1}$$

Non solo, mandare H_n in $\mathbb{Z}S_n$ così suggerisce che H_n rappresenti „famiglia di algebre" di cui una è $\mathbb{Z}S_n$, come in geometria algebrica abbiamo spesso famiglie di varietà su una base (= spazio dei parametri)

$$\varphi : \underset{\text{famiglia}}{X} \longrightarrow \underset{\text{base}}{Y}$$

singole varietà $= \varphi^{-1}(y)$ con $y \in Y$

es. $X = \{ (x,y,t) \in \mathbb{C}^3 \mid xy = t \}$ $\quad Y = \mathbb{C}$

$\varphi(x,y,t) = t$

$X_t = \varphi^{-1}(t) = \{ xy = t \}$ al variare di $t \in \mathbb{C}$

sono „deformazione di $X_0 : xy = 0$".

Si può pensare dunque H_n come una „deformazione" dell'algebra gruppo di S_n.

Obiettivo: studiare H_n costruita a partire da gruppi più generali di S_n: i gruppi di Coxeter.

Gruppi di Coxeter

Def.: 1) Un sistema di Coxeter è una coppia (W, S) dove W è un gruppo, $S \subseteq W$ è un sottoinsieme finito tali che esiste una matrice $(m_{st})_{s,t \in S}$ a coeff. in $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ t.c.

1) $m_{ss} = 1 \quad \forall s$

2) $m_{st} = m_{ts} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{+\infty\} \quad \forall s \neq t$

3) $W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = e \quad \forall s,t \in S \mid m_{st} \neq +\infty \}$

2) Il rango di (W, S) è per def. $|S|$.

3) Se per un gruppo W esiste S t.c. (W, S) è un sistema di Coxeter, allora W si dice gruppo di Coxeter.

Oss.: Per $s=t$ la relaz. $(st)^{m_{st}}=e$ è $\boxed{s^2=e}$. Per $s \neq t$ la rel. $(st)^{m_{st}}=e$ si scrive anche come (quindi $s=s^{-1}$)

$$\underbrace{stst\ldots}_{m_{st} \text{ fattori}} = \underbrace{tsts\ldots}_{m_{st} \text{ fattori}}$$

ad es. se $m_{st} = 3$ allora $sts = tst$.

<u>Def.</u>: 1) Dato $w \in W$ esistono $s_1, \ldots, s_k \in S$ (non nec. distinti né unici) t.c. $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ (perché $s^{-1} = s \ \forall s \in S$). La sequenza $(s_1, \ldots, s_k)$ si dice <u>espressione</u> di w di lunghezza k.
Se k è la minima lunghezza possibile di un'espr. di w allora $k = \ell(w)$ si dice <u>lunghezza di w</u> e ogni espressione di w di lunghezza $\ell(w)$ si dice <u>espressione ridotta</u> di w.

2) Il <u>grafo di Coxeter</u> di un sist. di Coxeter (W, S) è il grafo che ha per vertici gli elem. di S, due elem. s, t sono collegati da un lato se $m_{st} \geq 3$, e il lato ha etichetta m_{st} se $m_{st} \geq 4$

<u>Esempi</u>: Tipo A. Grafo di Coxeter $\underset{s_1}{\bullet} - \underset{s_2}{\bullet} - \underset{s_3}{\bullet} \cdots\cdots \underset{s_{n-2}}{\bullet} - \underset{s_{n-1}}{\bullet} \rightsquigarrow A_{n-1}$

Cioè $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ genera W con relazioni

$s_i^2 = e \ \forall i$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$

$s_i s_j = s_j s_i \quad$ se $|i-j| \geq 2$

Notiamo che queste relazioni sono soddisfatte dalle trasposizioni $(i \ i{+}1)$ di S_n (che generano S_n) quindi c'è un omomorfismo suriettivo $W \longrightarrow S_n$ che manda s_i in $(i\ i{+}1)$.

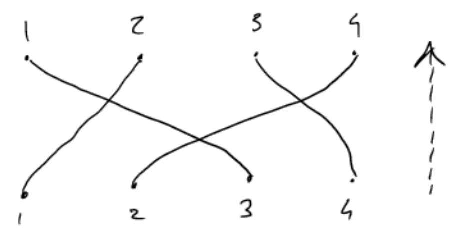
<u>Esercizio:</u> Dimostrare che se (W, S) è di tipo A_{n-1} allora

W è isomorfo a S_n per $n = 2, 3$.

(Per ogni n è fattibile ma non tanto facile! Diamolo per buono per ora.)

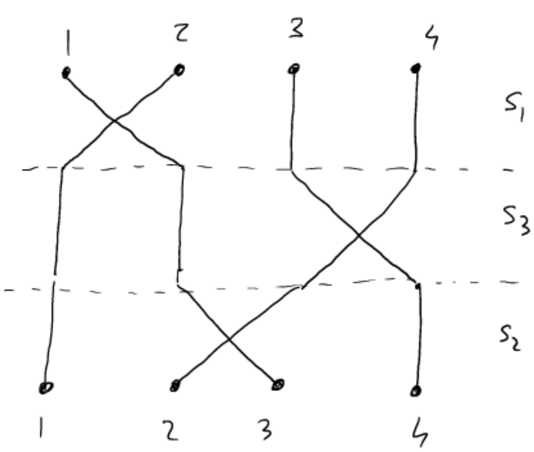
(Sugg.: per $n=3$ si possono elencare gli elem. moltiplicando a dx per s_1, s_2: $\quad e,\ s_1,\ s_1 s_2,\ s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, \ldots$
$s_2,\ s_2 s_1, \ldots$)

Notazione per S_n usando diagrammi di „stringhe"



$= \ w = (1\ 2\ 4\ 3)$ ← notazione con la decomp. in cicli

Conviene disegnarli evidenziando gli scambi, questo crea subito

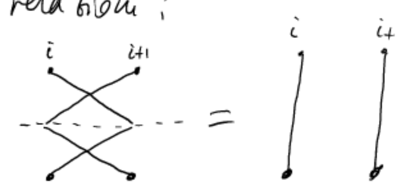


un'espressione per w, leggendo gli scambi dall'alto verso il basso e mettendo le riflessioni semplici da sinistra verso destra:

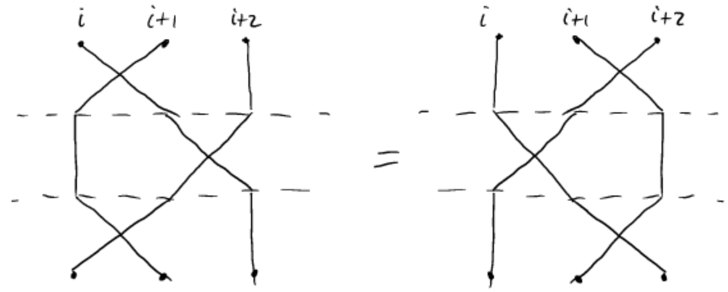
$\Longrightarrow \boxed{w = s_1 s_3 s_2}$

In questo modo è anche facile visualizzare le relazioni:

$s_i^2 = e \quad \rightsquigarrow$

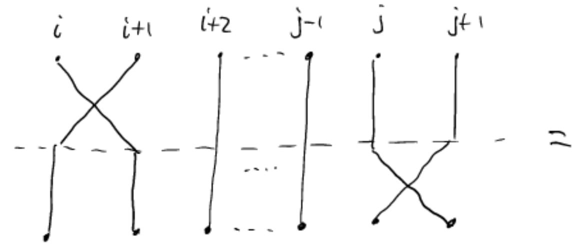


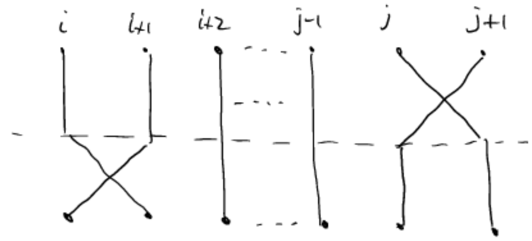
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ $\longleftrightarrow$



(in teoria dei nodi questa è una mossa di Reidemeister)

$s_i \, s_j = s_j \, s_i$ $\leadsto$

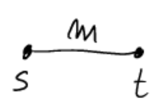




<u>Esercizio:</u> Assumendo $W \cong S_n$ (di tipo A_{n-1}), trovare un'espressione della trasposizione $(i \;\; j)$ come prodotto di riflessioni semplici $(k \;\; k+1)$ di lunghezza $2(j-i)-1$ (con $j > i$).

<u>Esercizio.</u> (<u>FACOLTATIVO</u>) Usando questi diagrammi, dim. che $W \cong S_n$ (di tipo A_{n-1}) per $n=4$. (forse difficile?)

<u>Esempio:</u> Tipo $I_2(m)$:



con $m \geq 3$

cioè due generatori s, t con $s^2 = t^2 = e$ e la rel. $(st)^m = e$ se $m \in \mathbb{Z}$, opp. nessun'altra rel. se $m = +\infty$. Osserviamo che $I_2(\infty)$ è un gruppo <u>infinito</u>.

Esercizio: Sia D_m il gruppo diedrale (= simmetrie dell'm-agono reg.).
Dim. che D_m è un gruppo di Coxeter con generatori
$S = \{\sigma, \sigma\rho\}$ dove σ è una riflessione e ρ una rotazione.

Per il resto di questa sezione fissiamo un sist. di Coxeter (W, S).

Lemma: L'applicazione

$s \longmapsto -1$ si estende a un omomorfismo di gruppi

$$W \longrightarrow \{1, -1\}$$

Dim.: Si verifica immediatam. che $\{\varepsilon(s) \mid s \in S\}$ soddisfa le relaz. che definiscono W. $\square$

Prop.: Per ogni $u, w \in W$ e per ogni $s \in S$:

1) $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$
2) $\ell(uw) \equiv \ell(u) + \ell(w) \mod 2$
3) $\ell(su) = \ell(u) \pm 1$
4) $\ell(w) = \ell(w^{-1})$
5) $|\ell(u) - \ell(w)| \leq \ell(uw) \leq \ell(u) + \ell(w)$
6) $\ell(uw^{-1})$ è una distanza sull'insieme W.

Dim.: Esercizio. $\square$

La rappresentazione geometrica e le radici

Alcuni gruppi di Coxeter si possono vedere in $O(n,\mathbb{R})$ per qualche n, come gruppi generati da riflessioni in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio i gruppi diedrali visti in un esercizio. Anche S_n: le matrici di permutazione sono tutte ortogonali e quella corrisp. a $(i\ i+1)$ è la riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale al vettore $e_i - e_{i+1}$ dove $(e_1, .., e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

In generale tutti i gruppi di Coxeter sono isomorfi a gruppi di matrici (non vero in generale per gruppi infiniti!), anzi sono tutti isomorfi a sottogruppi di qualche $O(a, b, \mathbb{R}^n)$ generati da "riflessioni". Vediamolo.

segnatura della f. bil. simmetrica

Dato un sistema di Coxeter (W, S), sia V spazio vett. su $\mathbb{R}$ con base fatta da vettori α_s al variare di s in S. Mettiamo su V una forma bil. simmetrica B imponendo

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{\pi}{m(s,s')}\right) & \text{se } m(s,s') \neq +\infty \\ -1 & \text{se } m(s,s') = +\infty \end{cases}$$

Oss.: In generale B non è sempre un prodotto scalare e non è neppure sempre nondegenere. Però $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1 \quad \forall s \in S$

quindi $\alpha_s^\perp$ (risp. a B) è un iperpiano in V non contenente α_s.

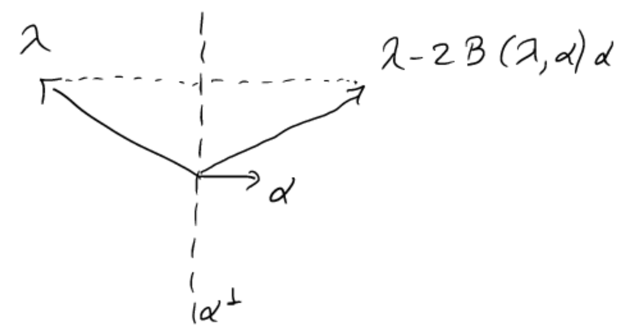
Def: Definiamo la riflessione $\sigma_s : V \longrightarrow V$ come

$$\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda, \alpha_s)\alpha_s$$

Osservazione: Se B è un prodotto scalare e $\|\alpha\| = 1$, la formula

$$\lambda - 2B(\lambda, \alpha)\alpha \quad \text{è proprio quella della}$$

riflessione di λ rispetto all'iperpiano ortogonale ad α:



Esercizio: Verificare che per il gruppo diedrale $I_2(m)$ ($m \neq +\infty$) si può scegliere concretamente la base $(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2})$ di $V = \mathbb{R}^2$ in modo che B sia il prodotto scalare standard.

Esercizio: σ_s preserva B, cioè $B(\sigma_s(\lambda), \sigma_s(\mu)) = B(\lambda, \mu)$ $\forall s \in S$ $\forall \lambda, \mu \in V$.

Proposizione: Esiste un omomorfismo $W \xrightarrow{\sigma} GL(V)$ t.c. $s \mapsto \sigma_s$, con immagine $\sigma(W)$ che preserva la forma bil. B.

Inoltre l'ordine di $ss' \in W$ è $m(s,s')$ $\forall s, s' \in S$.

Dim. Prop.: Verifichiamo che $\sigma_s \sigma_{s'}$ ha ordine $m(s,s') = m$ $\forall s, s' \in S \mid s \neq s'$.

Consid. $U = \mathrm{span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$.

Si calcola facilmente che $B(u,u) \geq 0$ $\forall u \in U \setminus \{0\}$, e anche che $B(u,u) > 0$ se $m \neq +\infty$ (conto esplicito ponendo $u = a\alpha_s + b\alpha_{s'}$).

Inoltre σ_s e $\sigma_{s'}$ stabilizzano U: calcoliamo l'ordine di $\sigma_s S_{s'}|_U$.

Caso 1: Se $m(s,s') \neq +\infty$ allora $B|_{U \times U}$ è un prod. scalare sul piano U, e si riconosce facilmente che $\sigma_s S_{s'}|_U$ è una rotazione di angolo $\frac{2\pi}{m}$, quindi ha ordine m.

Inoltre essendo $B|_{U \times U}$ nondegenere vale $V = U \oplus U^\perp$ e $\sigma_s \sigma_{s'}$ è l'identità su $U^\perp$, quindi $\sigma_s \sigma_{s'}$ ha ordine m.

Caso 2: Si calcola facilmente $(\sigma_s \sigma_{s'})^k (\alpha_s) = 2k(\alpha_s + \alpha_{s'}) + \alpha_s$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, quindi $\sigma_s \sigma_{s'}$ ha ordine infinito su U quindi anche su V.

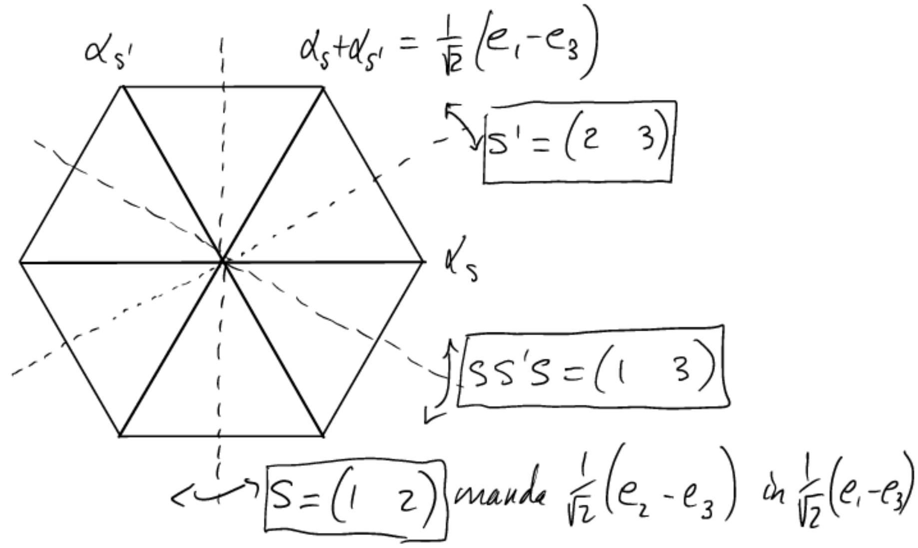
$\square$

Def.: La rappresentaz. σ di W su V si chiama rappr. geometrica di W.

Esempio: Sia (W, S) sist. di Coxeter con grafo $\underset{s}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{s'}{\bullet}$ cioè A_2, si può realizzare la rappr. geom. nel modo seguente: sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il piano di equaz. $x+y+z=0$. Prendiamo i vettori

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) = \alpha_s \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = \alpha_{s'}$$

e B = prod. scalare standard. Allora $m(s,s') = 3$, $-\cos\left(\frac{\pi}{m(s,s')}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e osserviamo $B(\alpha_s, \alpha_s) = \frac{2}{2} = 1$, $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\frac{1}{2}$ quindi α_s e $\alpha_{s'}$ realizzano la rappr. geom. su $V = \operatorname{span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$. Vediamo l'azione di $W \cong S_3$:



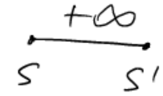
Qui: $\{\text{riflessioni}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{trasposizioni } (i\ j) \in S_3\}$

Osserviamo il fatto seguente: l'elem. $ss's$ non è in S, però è anch'esso una riflessione rispetto a un iperpiano (perché è coniugato all'elem. s', infatti $ss's = ss's^{-1}$). I 6 vertici dell'esagono si ripartiscono allora a seconda delle riflessioni:

$$\pm\alpha_s \longleftrightarrow (1\ 2) \quad , \quad \pm\alpha_{s'} \longleftrightarrow (2\ 3) \quad , \quad \pm\underbrace{(\alpha_s + \alpha_{s'})}_{\substack{\parallel \\ s(\alpha_{s'})}} \longleftrightarrow (1\ 3)$$

Esempio: la rappr. geometrica di $I_2(+\infty)$ è più strana, vediamola.

V ha dim. 2, base $\alpha_s, \alpha_{s'}$.

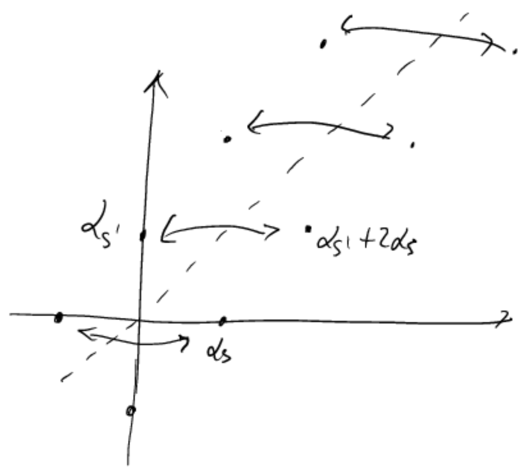


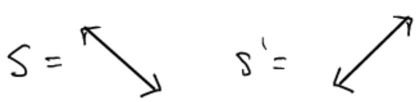
B è degenere di matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

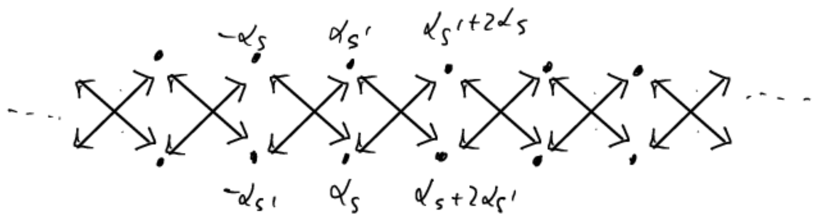
Abb. $s(\alpha_{s'}) = \alpha_{s'} - 2B(\alpha_s, \alpha_{s'})\alpha_s = \alpha_{s'} + 2\alpha_s$

$s'(\alpha_s) = \alpha_s + 2\alpha_{s'}$ e in generale W stabilizza l'insieme $\{a\alpha_s + b\alpha_{s'} \mid a,b \in \mathbb{Z}, |a-b| = 1\}$ e vale

$$s(a\alpha_s + (a+1)\alpha_{s'}) =$$
$$= -a\alpha_s + (a+1)(\alpha_{s'} + 2\alpha_s)$$
$$= \alpha_s(-a+2a+2) + (a+1)\alpha_{s'}$$
$$= (a+2)\alpha_s + (a+1)\alpha_{s'}$$







Oss.: ss' è una traslazione verso destra della fila superiore.

Deduciamo: ss' ha ordine ∞ in W, quindi W è effettivamente un gruppo infinito.

D'ora in poi scriveremo semplicem. $w(\alpha)$ invece di $\sigma_w(\alpha)$ per $w \in W$, $\alpha \in V$.

Def.: 1) Il sistema di radici di W è $\Phi = W.\{\alpha_s \mid s \in S\}$, i suoi elem. si dicono radici. Le radici positive $\Phi^+ \subseteq \Phi$ sono quelle che si scrivono come $\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s$ con $c_s \geq 0$ $\forall s \in S$.
Analogam. si definiscono le radici negative $\Phi^- \subseteq \Phi$ con $c_s \leq 0$.
Usiamo anche le notaz. $\alpha > 0$ (risp. $\alpha < 0$) per $\alpha \in \Phi^+$ (risp. $\alpha \in \Phi^-$).

2) Gli elem. σ_s con $s \in S$ si dicono anche riflessioni semplici.

Oss.: 1) $B(\alpha, \alpha) = 1$ $\forall \alpha \in \Phi$

2) $\forall \alpha \in \Phi$: $-\alpha \in \Phi$ (perché $s(\alpha_s) = -\alpha_s$)

Teorema: Siano $w \in W$, $s \in S$. Se $\ell(ws) > \ell(w)$ allora $w(\alpha_s) > 0$, se $\ell(ws) < \ell(w)$ allora $w(\alpha_s) < 0$.

Dim.: La seconda affermaz. del teorema segue dalla prima, infatti se $\ell(ws) < \ell(w)$ allora $\ell(w) = \ell((ws)s) > \ell(ws)$ e allora $ws(\alpha_s) > 0$ dalla prima aff., da cui $w(-\alpha_s) > 0$ cioè $w(\alpha_s) < 0$.
Dim. la prima affermazione per induzione su $\ell(w)$: se $\ell(w) = 0$ allora $w = e$ e vale $w(\alpha_s) = \alpha_s > 0$ $\forall s \in S$.
Supp. $\ell(w) > 0$, allora esiste $s' \in S$ t.c. $\ell(ws') = \ell(w) - 1$ (ad es. poss. prendere s' = l'ultima rifless. semplice di un'espr. ridotta di w).

Visto che $\ell(ws') < \ell(w) < \ell(ws)$ vale $s \neq s'$.

Sia $\tilde{W}$ il sgr di W gen. da s, s', e dato $w \in \tilde{W}$ sia $\tilde{\ell}(w)$ la lunghezza di w rispetto ai gen. s, s' (cioè la lunghezza minima di un'espr. di w contenente solo s, s'). Nella classe laterale $w\tilde{W}$ poniamo:

$$A = \{ v \in w\tilde{W} \mid \ell(v) + \tilde{\ell}(\underbrace{v^{-1}w}_{\in \tilde{W}}) = \ell(w) \} \quad (\ni w)$$

$w = v\tilde{v}$

Scegliamo $v \in A$ con $\ell(v)$ minima, scriviamo $\tilde{v} = v^{-1}w$ e vediamo cosa fanno alle radici. Prima di tutto $ws' \in A$, perché $ws' \in w\tilde{W}$ e $\ell(ws') + \tilde{\ell}(s') = (\ell(w)-1)+1 = \ell(w)$. Dalla minimalità di $\ell(v)$ abb. $\ell(v) \leq \ell(ws') < \ell(w)$: vogliamo usare l'induzione su v, ma dobb. confrontare prima $\ell(v)$ con $\ell(vs)$ (vogliamo sia $\ell(vs) > \ell(v)$).

Supp. per assurdo $\ell(vs) < \ell(v)$, allora:

$$\begin{aligned}
\ell(w) &\leq \ell(vs) + \ell((sv^{-1})w) && \text{(perché } \ell(ab) \leq \ell(a)+\ell(b)\text{)} \\
&\leq \ell(vs) + \tilde{\ell}(sv^{-1}w) && \text{(perché } sv^{-1}w \in \tilde{W} \text{ e } \ell \leq \tilde{\ell}\text{)} \\
&= \ell(v) - 1 + \tilde{\ell}(sv^{-1}w) \\
&\leq \ell(v) - 1 + \tilde{\ell}(v^{-1}w) + 1 \\
&= \ell(w)
\end{aligned}$$

quindi sono tutte uguaglianze, e da $\ell(w) = \ell(vs) + \tilde{\ell}(sv^{-1}w)$ abb. $vs \in A$, contraddicendo $\ell(vs) < \ell(v)$ a causa della minimalità di $\ell(v)$: assurdo. Segue $\ell(vs) > \ell(v)$, e analogam. $\ell(vs') > \ell(v)$.

Per induzione abb. $v(\alpha_s), v(\alpha_{s'}) > 0$. Vediamo ora cosa fa $w = v\tilde{v}$ con α_s. Intanto confrontiamo $\tilde{\ell}(\tilde{v}s)$ con $\tilde{\ell}(\tilde{v})$: se $\tilde{\ell}(\tilde{v}s) < \tilde{\ell}(\tilde{v})$ allora $\ell(ws) = \ell(vv^{-1}ws) \leq \ell(v) + \ell(v^{-1}ws) = \ell(v) + \ell(\tilde{v}s) \leq$

$\leq \ell(v) + \tilde{\ell}(\tilde{v}s) < \ell(v) + \tilde{\ell}(\tilde{v}) = \ell(w)$ che contraddice $\ell(ws) > \ell(w)$.

Quindi $\tilde{\ell}(\tilde{v}s) > \tilde{\ell}(\tilde{v})$, ma questo vuol dire che qualsiasi espressione rid. di $\tilde{v}$ in s, s' finisce con s'. Due casi ora sono possibili:

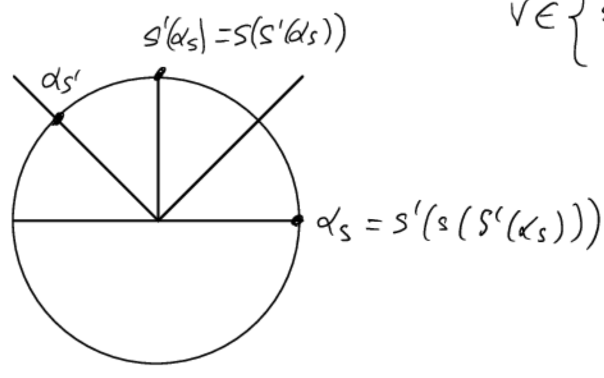
Caso 1: $m(s,s') = +\infty$. Allora $\tilde{v}(\alpha_s) \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$, infatti $\tilde{v}$ è un'espr. del tipo $\dots ss'ss'ss'$, e basta calcolare usando $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$: $s'(\alpha_s) = \alpha_s + 2\alpha_{s'}$, $s(s'(\alpha_s)) = 2\alpha_{s'} + 3\alpha_s$, $s'ss'(\alpha_s) = 3\alpha_s + 4\alpha_{s'}$, ecc...

Caso 2: $m = m(s,s') \neq +\infty$. Allora m è il massimo valore di $\tilde{\ell}$, cioè $\tilde{\ell}(\tilde{v}) \leq m$. Inoltre ogni elem. con $\tilde{\ell} = m$ ha un'espr. ridotta (in s, s') che finisce con s, quindi $\tilde{\ell}(\tilde{v}) < m$.

Ora basta un calcolo diretto nel piano $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ che è euclideo con prod. scalare B: si ottiene ugualmente $\tilde{v}(\alpha_s) \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$

Esempio con $m = 2$: $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tilde{v} \in \{s', ss', s'ss'\}$



Concludiamo in entrambi i casi:

$$w(\alpha_s) = v\tilde{v}(\alpha_s) = v(\underset{\geq 0}{a}\,\alpha_s + \underset{\geq 0}{b}\,\alpha_{s'}) = a\, v(\alpha_s) + b\, v(\alpha_{s'}) > 0.$$

$\square$

Corollario 1: La rappresentaz. geometrica $\sigma : W \longrightarrow GL(V)$ è fedele (= iniettiva).

Dim.: Dato $w \in W$, se $w \neq e$ allora esiste $s \in S$ t.c. $\ell(ws) < \ell(w)$, e per il teorema vale $w(\alpha_s) < 0$, cioè w non agisce banalmente su V. Cioè $\sigma(w) \neq Id_V$, e σ è perciò iniettiva. □

D'ora in poi saremo liberi di identificare ogni $w \in W$ con $\sigma_w \in GL(V)$.

Corollario 2: $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$

Dim.: Vale $\Phi = \{ w(\alpha_s) \mid w \in W, s \in S \}$, e dal teorema segue

$w(\alpha_s) \in \Phi^+$ oppure $w(\alpha_s) \in \Phi^-$. □

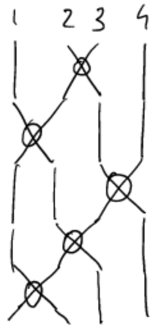
Esercizio: Dimostrare che se (W, S) è di tipo A_{n-1} allora W è isomorfo a S_n (n qualsiasi), generatori $(i \ i{+}1) \in S_n$.
(Sugg.: dimostrare che la rappr. geom. di W si può vedere come S_n che agisce sul sottosp. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ dato da

$$V = \{ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$$

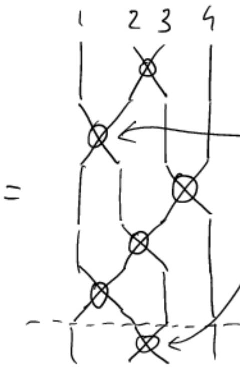
prendendo $\alpha_{s_i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_i - e_{i+1})$ dove $(e_1, \ldots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

Interpretazione geometrica della lunghezza in W

Esempio: Con $W = S_n$, $\ell(w)$ si „visualizza" facilmente. Intanto, data un'espressione di $w \in S_n$, il numero di generatori usati è il numero di incroci nel diagramma:

$w =$ 

cioè $w = s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$

ad es. $ws_2 =$ 

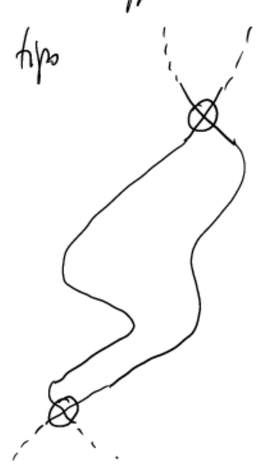
questi due scambi sono superflui!

e infatti $ws_2 =$ 

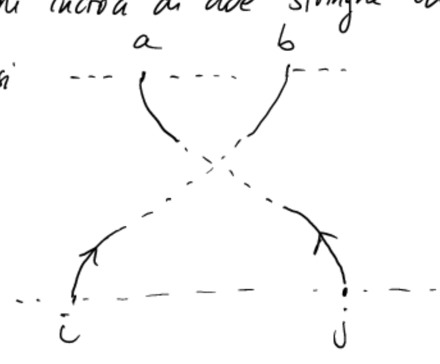
non metto s_1 qui

non metto s_2 alla fine

La lunghezza $\ell(w)$ allora è il minimo numero possibile in un diagramma che rappresenta w. E' ragionevole pensare che incroci superflui siano sempre del tipo



, e „scioglierli" tutti vuol dire che conserviamo solo gli incroci di due stringhe che devono scambiarsi (una e una sola volta!): $i < j$, $a < b$



cioè sembrerebbe: $\ell(w) = |\{(i,j) \mid i,j \in \{1,\dots,n\},\ i<j,\ w(i) > w(j)\}|$

(queste coppie (i,j) si chiamano le <u>inversioni</u> di $w \in W = S_n$).

In effetti è vero! Altra interpretazione: le radici di S_n

sono $(e_1 - e_2) = \alpha_{s_1}, \dots, (e_{n-1} - e_n) = \alpha_{s_{n-1}}$ (ignoriamo i

coeff. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui per semplicità), poi tutto quello che possiamo

scrivere come $w(e_i - e_{i+1})$, $w \in S_n$. Otteniamo:

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}, \quad e:$$

$$\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid i<j\} \qquad e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + \dots + (e_{j-1} - e_j)$$

$$\Phi^- = \{e_j - e_i \mid i<j\}$$

Osserviamo: ogni inversione (i,j) di $w \in S_n$ (cioè tale che

$i<j$ e $w(i) > w(j)$) corrisponde a una radice positiva

$e_i - e_j$ tale che $w(e_i - e_j) = e_{w(i)} - e_{w(j)}$ è negativa!

<u>Teorema</u>: Sia (W, S) sistema di Coxeter. Per ogni $w \in W$:

$$\ell(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}| \quad \left(= |\Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-)|\right)$$

In particolare, se $s \in S$ allora

$$s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$$

(perché $s(\alpha_s) = -\alpha_s$ ed è l'unica che diventa <0 visto che $\ell(s) = 1$).

Dim.: Vediamo il caso particolare $w = s \in S$. Allora $s(\alpha_s) = -\alpha_s$, verifichiamo che è l'unica radice in $\Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-)$. Sia $\beta \in \Phi^+$, $\beta \neq \alpha$, allora $\beta \notin \mathbb{R}\alpha_s$ (perché $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1 = B(\beta, \beta)$) e $\beta \neq \pm\alpha_s$.

Scriviamo $\beta = \sum_{\gamma \in S} c_\gamma \gamma$, esiste $\gamma_0 \in S \setminus \{\alpha\}$ t.c. $c_{\gamma_0} > 0$,

quindi $s(\beta) = \beta - 2B(\beta, \alpha_s)\alpha_s = \sum_{\gamma \in S \setminus \{\gamma_0, \alpha\}} c_\gamma \gamma + \underbrace{c_{\gamma_0}}_{>0} \gamma_0 + (?)\alpha$

Visto che $\beta > 0$ opp. $\beta < 0$, anche un solo coeff. > 0 implica $\beta > 0$.

Quindi il caso $w = s \in S$, cioè il caso $\ell(w) = 1$, è dimostrato.

Caso generale. Poniamo $n(w) = |\Phi^+(w)|$ dove $\Phi^+(w) = \Phi^+ \setminus w^{-1}(\Phi^-)$.

Abb. visto che $n(w) = \ell(w)$ se $\ell(w) = 1$. Siano $w \in W$ qualsiasi, e $s \in S$. Se $w(\alpha_s) > 0$ e $\beta \in \Phi^+(ws)$ allora

$$\beta \begin{cases} = \alpha_s, & s(\beta) = -\beta, \quad w(-\beta) < 0 \\ \neq \alpha_s, & s(\beta) > 0 \text{ per la prima parte della dim., } w(\beta) < 0 \\ & \text{cioè } \beta \in \Phi^+(w) \end{cases}$$

Cioè $\Phi^+(ws) = s(\Phi^+(w)) \cup \{\alpha_s\}$ (unione disgiunta).

Segue: se $w(\alpha_s) > 0$ allora $n(ws) = n(w) + 1$

Analogam., se $w(\alpha_s) < 0$ otteniamo

$$\Phi^+(ws) = s\left(\Phi^+(w) \setminus \{\alpha_s\}\right) \quad \text{da cui} \quad n(ws) = n(w) - 1.$$

Cioè n si comporta come ℓ come in un teorema precedente.
Da questo e dalla prima parte della dim. segue facilmente
$\ell = n$ per induzione.

$\square$

Riflessioni e proprietà di scambio

Sia (W, S) un sistema di Coxeter. Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente teorema:

Teorema: (proprietà di scambio) Sia $(s_1, \dots, s_k)$ espressione di $w = s_1 \cdots s_k \in W$ e sia $s \in S$. Se $\ell(ws) < \ell(w)$ allora esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ t.c. $ws = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k$ (anche scritto $ws = s_1 \cdots \hat{s_i} \cdots s_k$). Lo stesso vale per sw.

Esiste però una versione ancora più forte, che coinvolge non solo le riflessioni semplici.

Def: Dati $w \in W$ e $s \in S$, l'elem. wsw^{-1} si dice *riflessione*.
Denotiamo con $T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$ l'insieme di tutte le riflessioni.

Oss: Dato $\lambda \in V$ abb.

$$(wsw^{-1})(\lambda) = w\left(w^{-1}(\lambda) - 2B(w^{-1}(\lambda), \alpha_s)\alpha_s\right) =$$

$$= \lambda - 2B(\lambda, w(\alpha_s))\, \underbrace{w(\alpha_s)},$$

ha „norma" nonnulla perché è la stessa di α_s

Quindi wsw^{-1} è la riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale di $\alpha = w(\alpha_s)$; wsw^{-1} dipende solo da α e non da w.

Questo spiega la def. precedente.

Denotiamo allora $s_\alpha = wsw^{-1}$ con $\alpha = w(\alpha_s)$.

<u>Oss.</u>: L'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow T \\ \alpha &\longmapsto s_\alpha \end{aligned}$$

è suriettiva, e chiaramente $s_\alpha = s_{-\alpha}$. Inoltre l'appl.

$$\begin{aligned} \Phi^+ &\longrightarrow T \\ \alpha &\longmapsto s_\alpha \end{aligned}$$

è biiettiva, perché se $\alpha, \beta \in \Phi^+$ soddisfano $s_\alpha = s_\beta$ allora

$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda, \alpha)\alpha = \lambda - 2B(\lambda, \beta)\beta \quad \forall \lambda \in V$ da cui

$B(\lambda, \alpha)\alpha = B(\lambda, \beta)\beta$ da cui segue $\alpha = \beta$ perché α, β hanno „norma" 1 e sono entrambe in Φ^+.

<u>Esempio</u>: Se $W = S_n$ e $S = \{(1\ 2), \dots, (n-1\ n)\}$ come al solito, allora $T = \{(i\ j) \mid i \neq j\}$ infatti data $\sigma \in S_n$ con $\sigma(1) = i$, $\sigma(2) = j$ abb. $(i\ j) = \sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$.

Lemma: Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ e $w \in W$. Se $w(\alpha) = \beta$ allora $s_\beta = w s_\alpha w^{-1}$

Dim.: Esercizio. $\square$

Generalizziamo a T il teorema su $\ell(ws)$.

Proposizione: Siano $w \in W$, $\alpha \in \Phi^+$. Vale $\ell(ws_\alpha) > \ell(w) \iff w(\alpha) > 0$.

Dim.: Basta dim. $\Longrightarrow$, infatti assumendo $\Longrightarrow$, se $\ell(ws_\alpha) \leq \ell(w)$ allora $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ e abb. $\ell(ws_\alpha s_\alpha) > \ell(ws_\alpha)$ da cui $ws_\alpha(\alpha) =$
$= w(-\alpha) > 0$ cioè $w(\alpha) < 0$.

(perché non hanno la stessa parità)

Per induzione su $\ell(w)$: se $\ell(w) = 0$ allora $w = e$ e $w(\alpha) = \alpha > 0$.
Se $\ell(w) \geq 1$ esiste $s \in S$ t.c. $\ell(sw) < \ell(w)$, da cui $\ell(sws_\alpha) \geq \ell(ws_\alpha) - 1 > \ell(w) - 1 = \ell(sw)$. Per induzione allora $sw(\alpha) > 0$. Supp. per assurdo $w(\alpha) < 0$, segue $w(\alpha) = -\alpha_s$, e per il lemma avrei $ws_\alpha w^{-1} = S_{-\alpha_s} = S_{\alpha_s} = s$, cioè $ws_\alpha = sw$, contraddicendo $\ell(w_{\alpha_s}) > \ell(w) > \ell(sw)$: assurdo. $\square$

Teorema: (proprietà forte di scambio) Sia $(s_1, \dots, s_k)$ espressione di $w = s_1 \cdots s_k \in W$ e sia $t \in T$. Se $\ell(wt) < \ell(w)$ allora esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ t.c. $wt = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k$ (anche scritto $wt = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_k$). Lo stesso vale per tw.
Inoltre se l'espr. di w è ridotta allora i è unico.

Dim.: Sia $\alpha \in \Phi^+$ t.c. $t = s_\alpha$. Visto che $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ vale $w(\alpha)<0$ per la prop. precedente. Ma $\alpha>0$, quindi esiste $i \in \{1,\dots,r\}$ t.c.

$$\underbrace{s_{i+1}\cdots s_r}_{=u}(\alpha)>0 \quad \text{e} \quad s_i s_{i+1}\cdots s_r(\alpha)<0. \text{ Allora}$$

$u(\alpha) = \alpha_{s_i}$, da cui $u s_\alpha u^{-1} = s_i$, cioè

$u s_\alpha = s_i u = s_i s_{i+1}\cdots s_r$. Deduciamo:

$$wt = ws_\alpha = s_1\cdots s_{i-1}\, s_i \cdot \underbrace{s_{i+1}\cdots s_r \cdot s_\alpha}_{u s_\alpha} = s_1\cdots s_{i-1}\cdot s_i \cdot s_i \cdot s_{i+1}\cdots s_r =$$

$$= s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$$

Infine supp. $\ell(w)=r$, e per assurdo supp. esistono $i,j\in\{1,\dots,r\}$ t.c. $i<j$ e $s_1\cdots \hat{s}_i \cdots s_r = s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_r = wt$. Allora $s_{i+1}\cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$, da cui

$$w = s_1\cdots s_i \cdots s_j \cdots s_r = s_1\cdots s_i \cdot s_i \cdots s_{j-1}\cdot s_{j+1}\cdots s_r =$$

$$= s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r \text{ : assurdo.}$$

$\square$

Corollario (condizione di cancellazione): Sia $w = s_1\cdots s_r$ un'espr. di W; se $\ell(w)<r$ allora esistono $i<j \in \{1,\dots,r\}$ t.c.

$$w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r.$$

Dim.: L'ipotesi implica che esiste $j\in\{1,\dots,r\}$ t.c.

$$\ell(s_1\cdots s_{j-1} s_j) < \ell(s_1\cdots s_{j-1})$$

e applichiamo il teorema a $w' = s_1\cdots s_{j-1}$ e a s_j. $\square$

Def.: Dato $I \subseteq S$ definiamo W_I = sottogr. di W generato da I.

Esercizi: 1) Per $w \in W_I$, def. $\ell_I(w)$ = lungh. minima di un'espr. di w contenente solo generatori in I. (Analogo di $\tilde{\ell}$ già vista.) Dimostrare che $\ell_I(w) = \ell(w)$ $\forall w \in W_I$.

2) Dim. che W_I è un sgr normale di W se e solo se $\forall s \in S \setminus I$ $\forall s' \in I$: $ss' = s's$.

Ordine di Bruhat

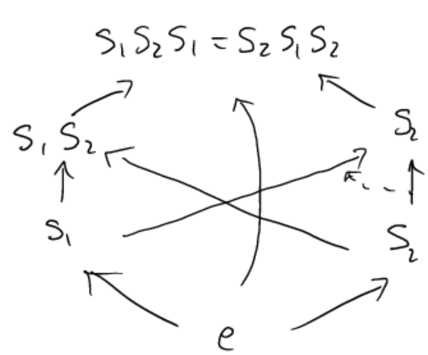
Sia (W, S) un sistema di Coxeter.

Si possono mettere su W diversi ordinamenti legati ai generatori S, ad es. $w < ws$ se $\ell(w) < \ell(ws)$, con $w \in W$ e $s \in S$.

Molto utile è il seguente:

Def.: Siano $w \in W$, $t \in T$. Se $\ell(wt) > \ell(w)$ allora scriviamo $w \to wt$. Dati $w, w' \in W$ scriviamo $w < w'$ se esiste una sequenza $w = w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_m = w'$. Questo definisce un ordine $\leq$ su W detto di Bruhat.

Esempio: In S_3:



$s_1 \to s_2 s_1$ perché $s_2 s_1 = s_1 \overbrace{s_1 s_2 s_1}^{\in T}$

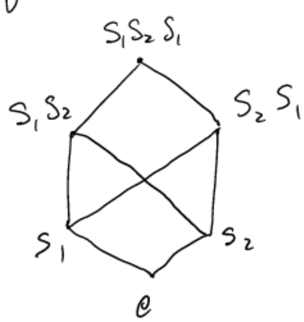
Esercizi: 1) Verificare che l'ordine di Bruhat è effettivam. un ordine.

2) Definiamo invece $w \longrightarrow tw$ con $t \in T$ e $\ell(tw) > \ell(w)$.
Dimostrare che l'ordine che si ottiene in questo modo è lo stesso di prima.

3) Dimostrare che $v \leq w \iff v^{-1} \leq w^{-1}$.

Def.: Il <u>diagramma di Hasse</u> di un insieme parzialmente ordinato W è un diagramma che ha per vertici W, e se $w < w'$ con nessun elem. x t.c. $w < x < w'$ allora w' si disegna più in alto di w con un lato che li congiunge.

Es.: Diagramma di Hasse di S_3:



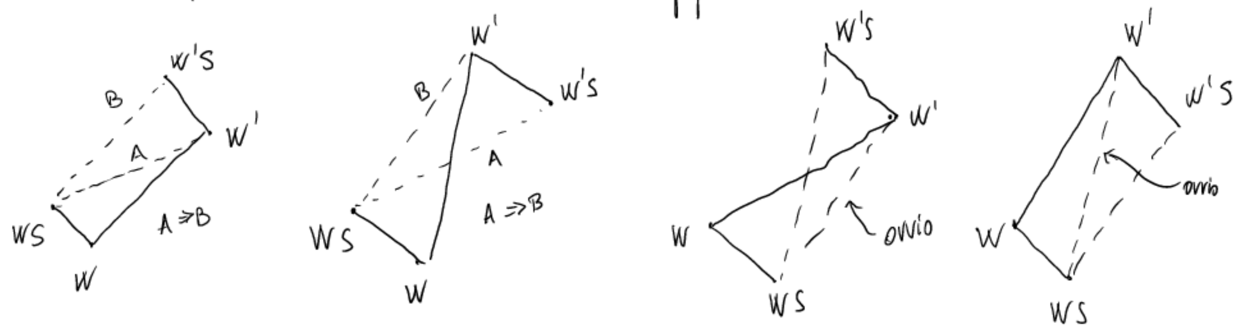
Esercizio: Disegnare il diagramma di Hasse di $I_2(m)$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$, e dim. che $v < w \iff \ell(v) < \ell(w)$.

Oss. 1) Sia $G = GL(n, \mathbb{R} \text{ opp. } \mathbb{C})$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$, $G/B = \{$ bandiere complete in $\mathbb{R}^n$ opp. $\mathbb{C}^n \}$. Allora abb. visto

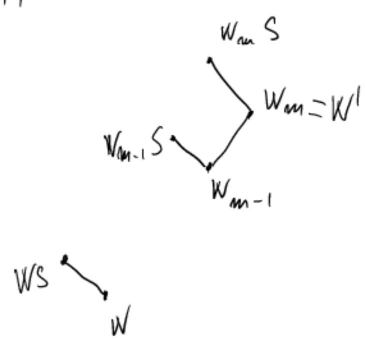
$$G/B = \bigcup_{w \in S_n} BwB, \quad \text{e vale} \quad \overline{BwB} = \bigcup_{\substack{u \in S_n \\ u \leq w}} BuB$$

Esercizio: Supp. $w < w'$ e che non ci sia alcun elem. x con $w < x < w'$. Dim. che $\ell(w') - \ell(w)$ è dispari.

Proposizione: Siano $w, w' \in W$, $s \in S$, e supponiamo $w \leq w'$. Allora vale $ws \leq w'$ oppure $ws \leq w's$ (o entrambe).



Dim.: Consid. una sequenza $w = w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_m = w'$ e supp. $w < w'$. Procediamo per induzione su m $(\ell \geq 2)$, e ricordiamo che $w_m = w' = w_{m-1} t$ con $\ell(w') > \ell(w_{m-1})$ e $t \in T$. Se $m > 2$ abb. $w_{m-1} > w$ e per induzione valgono



$$ws \leq \begin{cases} w_{m-1} & \text{opp.} \\ w_{m-1} s \end{cases}$$

$$w_{m-1} s \leq \begin{cases} w_m & \text{opp.} \\ w_m s \end{cases}$$

Se vale $ws \leq w_{m-1} s$ allora $ws \leq w_{m-1} s \leq \begin{cases} w_m & \text{opp.} \\ w_m s \end{cases}$ e abb. finito.

Se invece $ws \le w_{m-1}$ allora $ws \le w_{m-1} < w_m$ e abb. finito.

Manca la base dell'induzione, cioè $m=2$, cioè $w'=wt$ con $t\in T$.

Se $s=t$ allora $ws=w'$ e abb. finito, quindi supp. $s\neq t$.

Abb. 2 casi: a) $\ell(ws)=\ell(w)-1$,

b) $\ell(ws)=\ell(w)+1$.

Caso a): vale $ws<w<w'$ e abb. finito.

Caso b): vogliamo dedurre $ws<w's$. Osserviamo che $w's=$

$= wts = ws\underbrace{(sts)}_{=t'\in T}$ quindi intanto vale $w's = w\cdot(\in T)$.

Rimane da dim. $\ell(w's)>\ell(ws)$, supp. per assurdo $\ell(w's)\le\ell(ws)$. Ric. $\ell(w)$ e $\ell(w')$ non hanno la stessa parità, quindi neppure $\ell(ws)$ e $\ell(w's)$. Concludiamo $\ell(w's)<\ell(ws)$. Fissiamo un'espr. ridotta $s_1\cdots s_r=w$,

$ws=s_1\cdots s_r s$ è espr. ridotta (v. b)), allora

$w's=(ws)t'$ si ottiene da ws eliminando un gen., per la propr. forte di scambio. Questo gen. non può essere il fattore s finale di ws, perché $s\neq t$, quindi è s_i per qualche i:

$w's = s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_r s$, da cui $w'=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_r$

cioè $\ell(w')<\ell(w)$: assurdo.

$\square$

Teorema: Fissiamo $w = s_1 \cdots s_r$ un'espressione ridotta di $w \in W$, e sia $v \in W$. Allora $v \leq w$ se e solo se v si può ottenere come sottoespressione di $s_1 \cdots s_r$, cioè omettendo alcuni s_i.

Dim.: $\boxed{\Rightarrow}$ Supp. $v \to w$, con $w = vt$ e $t \in T$. Allora la propr. forte di scambio implica che v è ottenuto togliendo un s_i dall'espr. ridotta fissata per w. In generale con $v < w$ si itera il ragionam..

$\boxed{\Leftarrow}$ Procediamo per induzione su $r = \ell(w)$, il caso $\ell(w) = 0$ è ovvio.

Supp. $v = s_{i_1} \cdots s_{i_q}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_q$. Se $i_q < r$ allora consid. $ws_r = s_1 \cdots s_{r-1}$ che ha v come sottoespressione: per induz. vale $v \leq ws_r$ $(< w)$.

Se invece $i_q = r$, per induzione otteniamo

$$v s_{i_q} = s_{i_1} \cdots s_{i_{q-1}} \leq s_1 \cdots s_{r-1} = ws_r$$

e applichiamo la prop. precedente per dedurre

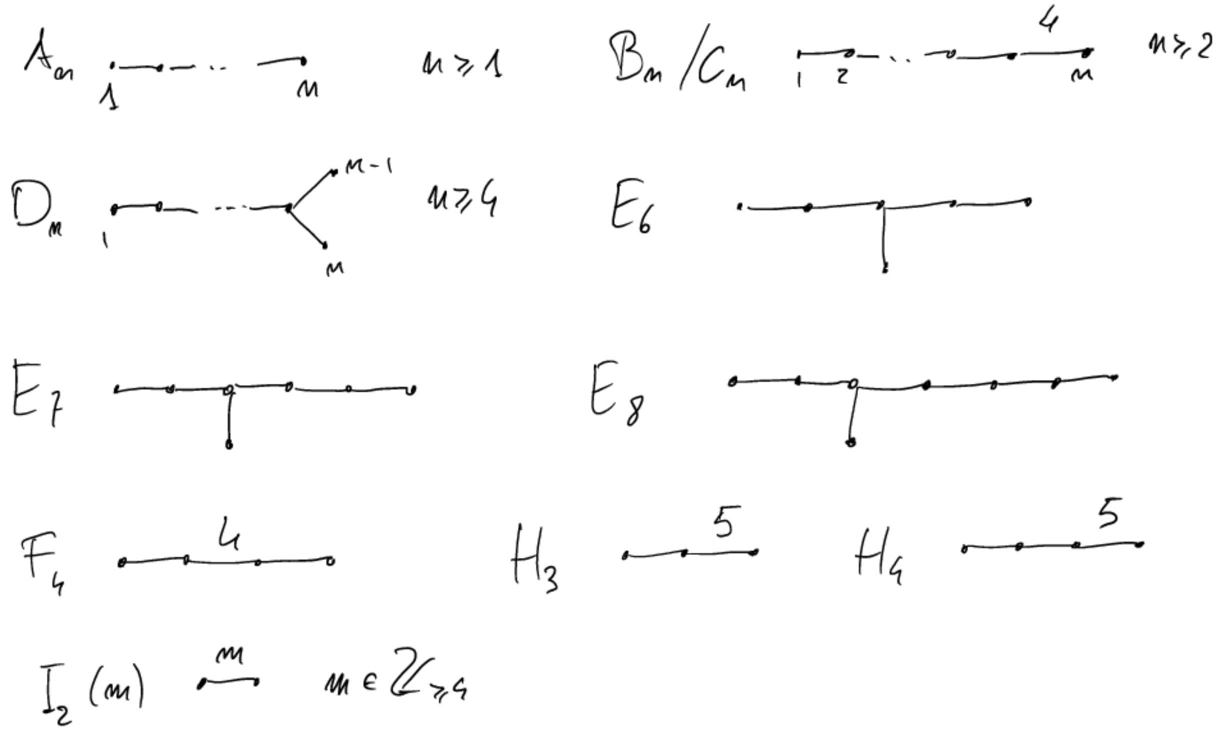
$$(v s_{i_q}) s_{i_q} = v \leq \begin{cases} w s_{i_q} = ws_r < w & \text{oppure} \\ \\ w s_{i_q} \cdot s_{i_q} = w \end{cases}$$

$\square$

Gruppi di Coxeter finiti e affini

Teorema: Sia (W, S) un sistema di Coxeter. Sono equivalenti:

1) W è un gruppo finito
2) B è un prod. scalare
3) Tutte le comp. connesse del grafo di Coxeter figurano nella lista seguente:



(senza dim.)

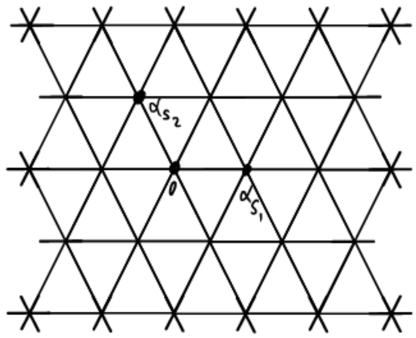
Def.: (W, S) è detto cristallografico se $m(s,s') \in \{2, 3, 4, 6, +\infty\}$ $\forall s, s' \in S$.

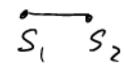
Teorema: Supp. che il grafo di Coxeter di (W, S) non contenga circuiti. Allora (W, S) è cristallografico se e solo se

V contiene un reticolo W-stabile.

(senza dim.)

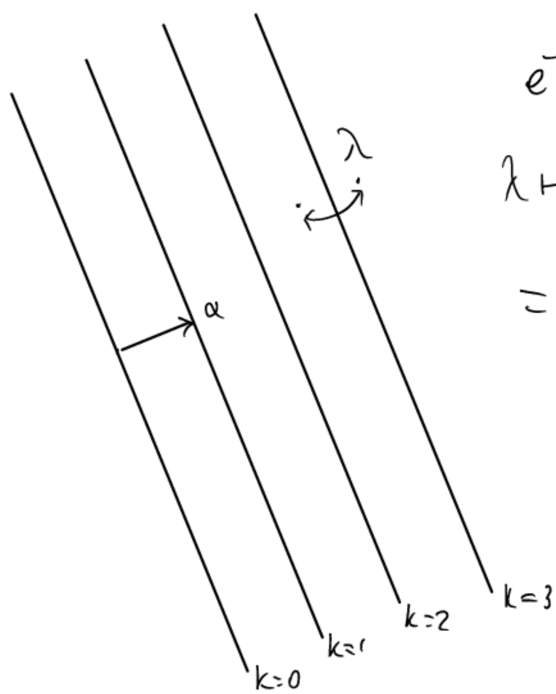
Es.: A_n è cristallografico $\forall n$, in A_2 il reticolo è fatto da vertici di triangoli equilateri:





$$\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}\}$$

Def.: Sia E uno sp. euclideo, sia $\alpha \in E$ vettore di norma 1, e sia $k \in \mathbb{Z}$. La <u>riflessione affine</u> rispetto all'iperpiano di eq. $(-,\alpha) = k$



è

$$\lambda \mapsto s_\alpha(\lambda - k\alpha) + k\alpha =$$

$$= \lambda - 2\underbrace{(\lambda,\alpha)}_{\text{prod. scalare}}\alpha + 2k\alpha$$

Def.: Un <u>gruppo di riflessioni affini</u> è un sottogruppo di

$$\mathrm{Aff}(E) = \{ f : E \to E \mid f \text{ affine} \}$$

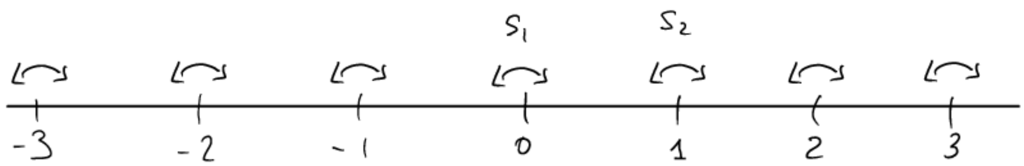
generato da riflessioni affini che agisce in modo proprio su E.

Oss.: Rk.: „proprio" vuol dire: $\forall K \subseteq E$ compatto:

$$\{ w \in W \mid w(K) \cap K \neq \emptyset \} \text{ è un ins. finito.}$$

Esercizio: Ogni orbita di W in E è un sottoins. discreto.

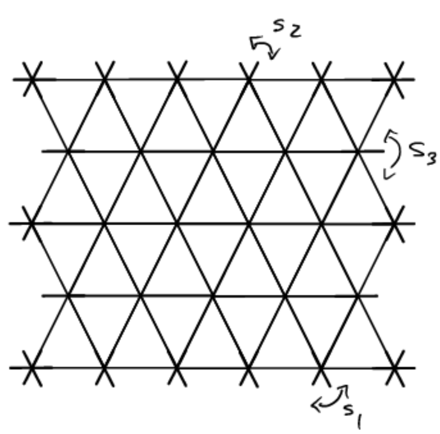
Esempi: 1) $E = \mathbb{R}$ W generato dalle riflessioni rispetto agli interi



bastano anche solo s_1 ed s_2.

2) $E = \mathbb{R}^2$, W generato dalle rifl. rispetto ai seguenti iperpiani affini:

(bastano s_1, s_2, s_3)



Def.: Dato W gruppo di riflessioni affini, denotiamo

$$\Phi = \{ H \text{ iperpiano associato a una riflessione affine in } W \}$$

Inoltre mettiamo su E una relaz. d'equivalenza:

$$\lambda \sim \mu \iff \forall H \in \Phi: \ \lambda, \mu \in H \ \text{oppure} \begin{cases} \lambda, \mu \notin H \text{ e sono} \\ \text{nello stesso semispazio} \\ \text{def. da } H \end{cases}$$

Le classi di equivalenza si dicono <u>facce</u> di E rispetto a Φ.

<u>Esercizio</u>: Dim. che $\bigcup_{H \in \Phi} H$ è chiuso in E.

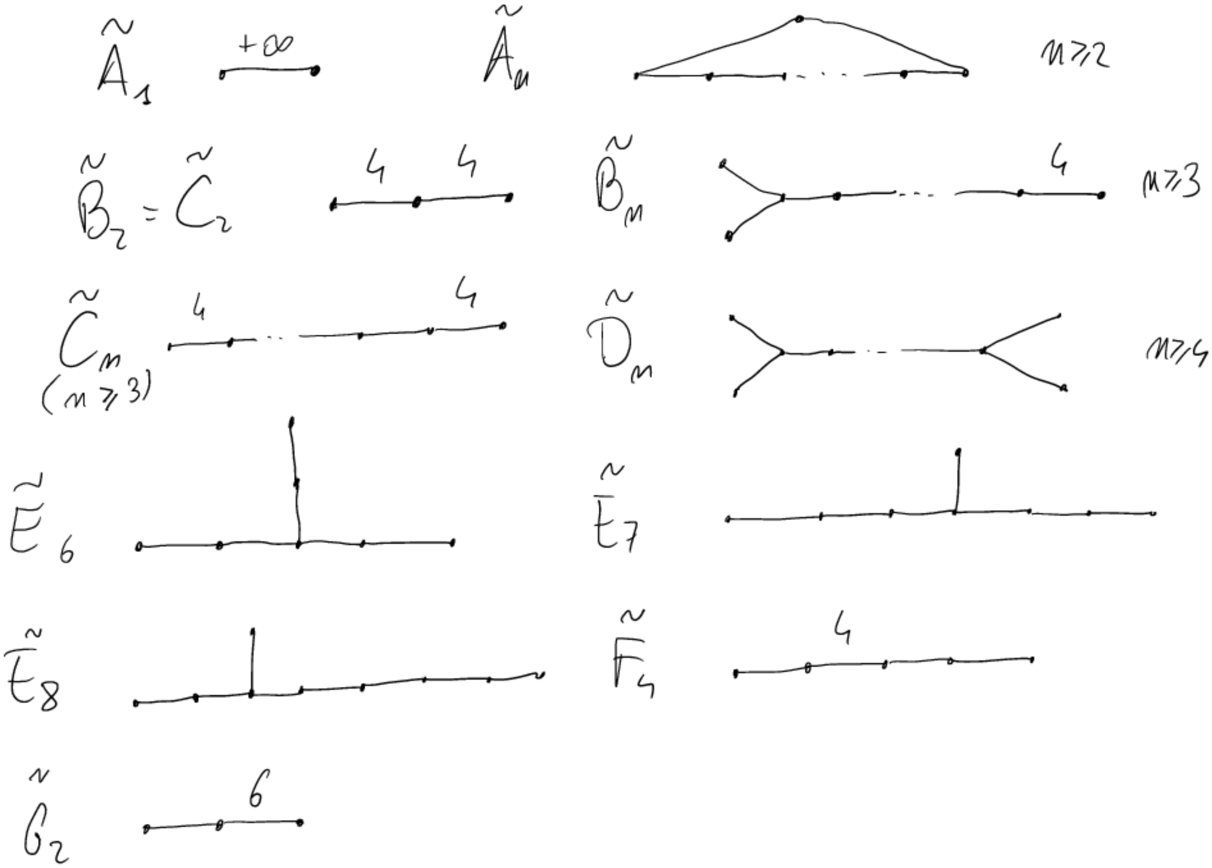
<u>Def.</u>: $\mathcal{A} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp. connesse} \\ \text{per archi}}}{\pi_0} \left(E \setminus \bigcup_{H \in \Phi} H \right)$, ogni $A \in \mathcal{A}$ si

dice <u>alcova</u> e la chiusura $\overline{A}$ si dice <u>alcova chiusa</u>.

Data $A \in \mathcal{A}$, le <u>sue facce</u> sono le facce di V contenute in $\overline{A}$ che sono contenute in un solo $H \in \Phi$ (hanno codim. 1), in tal caso H è detto <u>muro</u> di A.

Scegliamo una volta per tutte un'alcova $\Delta \in \mathcal{A}$ detta <u>alcova fondamentale</u>; l'insieme delle riflessioni rispetto ai muri di Δ è denotato S.

<u>Teorema</u>: (W, S) è un sistema di Coxeter; se W è infinito allora B della rappr. geom. è semidef. positiva, e il grafo di Coxeter è unione di comp. connesse in questo elenco:



(senza dim.)

<u>Oss.:</u> Togliendo un vertice qualsiasi da questi diagrammi si ottiene un diagr. di un gruppo di Coxeter finito.

<u>Algebre di Hecke: caso generico</u>

Siano A un anello comm. unitario, e (W, S) un sist. di Coxeter. Per ogni $s \in S$ scegliamo elem. $a_s \in A$ t.c. $a_s = a_{s'}$ se s ed s' sono coniugati in W, e analogam. $b_s \in A$.

Sia $\mathcal{E}$ l'A-modulo libero di base W, per $w \in W$ denotiamo con $T_w \in \mathcal{E}$ l'elem. corrispondente.

<u>Teorema</u>: Esiste un'unica struttura di A-algebra associativa t.c. T_e agisce su $\mathcal{E}$ come l'identità e t.c.

1) $T_s T_w = T_{sw} \qquad \forall s \in S\ \forall w \in W \mid \ell(sw) > \ell(w)$

2) $T_s T_w = a_s T_w + b_s T_{sw} \quad \forall s \in S\ \forall w \in W \mid \ell(sw) < \ell(w)$

<u>Oss.</u>: Le relaz. 1) e 2) hanno una „controparte geometrica":

$$G = GL(n), \quad W = S_n, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} \quad G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

$$BsB \cdot BwB = \begin{cases} BswB & \text{se } \ell(sw) > \ell(w) \\ BswB \cup BwB & \text{se } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

Dividiamo la dim. in diversi passi.

<u>Lemma 1</u>: 1) e 2) implicano le versioni „a destra" (supponendo T_e è elem. neutro)

1R) $T_w T_t = T_{wt} \qquad$ se $\ell(wt) > \ell(w)$

2R) $T_w T_t = a_t T_w + b_t T_{wt} \qquad$ se $\ell(wt) < \ell(w)$

$(\forall w \in W, \forall t \in S)$

Dim.: Per induzione su $\ell(w)$. Se $w=e$ allora $1) = 1R)$, $2) = 2R)$.

Supp. allora $\ell(w) \geq 1$, supp. $\ell(wt) > \ell(w)$ e scegliamo $s \in S$ t.c. $\ell(sw) < \ell(w)$, allora $\ell(w) = \ell(swt) > \ell(sw)$

quindi per induzione $T_{sw} T_t = T_{swt}$ e per 1) vale anche

$T_s T_{sw} = T_w$, da cui

$$T_w T_t = T_s T_{sw} T_t = T_s T_{swt} \underset{\text{per } 1)}{=} T_{wt}$$ quindi vale 1R).

Supp. invece $\ell(wt) < \ell(w)$; per 1R) abb.

$T_{wt} T_t = T_w$, da cui $T_w T_t = T_{wt} T_t^2 \overset{\text{per } 2)}{=}$

$$= T_{wt} \left(a_t T_t + b_t T_1 \right) = a_t T_{wt} T_t + b_t T_{wt} =$$

$$= a_t T_w + b_t T_{wt}.$$

$\square$

Lemma 2: 1) e 2) $(\forall s \, \forall w)$ sono equivalenti a

$$\left.\begin{array}{l} 3) \; T_s T_w = T_{sw} \quad \text{se } \ell(sw) > \ell(w) \\ 4) \; T_s^2 = a_s T_s + b_s T_1 \end{array}\right\} \forall s \, \forall w$$

(anche qui supponendo T_e elem. neutro)

 Dim.: 3) e 4) sono conseguenze di 1) e 2).

Viceversa, supp. 3) e 4) (cioè $\mathcal{E}$ dotata di str. di A-alg. associativa t.c. valgono 3) e 4)), e dim. 2) nel caso $\ell(sw) < \ell(w)$. Se $\ell(w) = 1$ allora 2) è 4), quindi in questo caso 2) è vera. In generale abb. $\ell(ssw) > \ell(sw)$ e 3) implica $T_s T_{sw} = T_w$, e 4) implica $T_s T_w = T_s^2 T_{sw} = (a_s T_s + b_s T_1) T_{sw} =$

$$= a_s T_s T_{sw} + b_s T_{sw} = a_s T_w + b_s T_{sw}$$

$\square$

<u>Dim. Teorema</u>, parte <u>unicità</u>:

Se $\mathcal{E}$ è dotata di struttura per cui valgono 1) e 2), allora $\mathcal{E}$ è generata come algebra da T_1 e dai T_s con $s \in S$. D'altronde 1) e 2) permettono di scrivere ogni prodotto $T_w T_v$ in modo iterato usando i T_s, quindi la struttura su $\mathcal{E}$ è unica. $\square$

Rimane da dimostrare la parte di „esistenza" del teorema.

Usiamo questo fatto a posteriori: se esiste una tale struttura su $\mathcal{E}$, allora sono definiti endomorfismi A-lineari

$$\lambda_s : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \qquad\qquad \rho_t : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$x \longmapsto T_s\, x \qquad\qquad x \longmapsto x T_t$$

per ogni $s, t \in S$, e soddisfano assiomi analoghi a 1), 2) e 1R), 2R) rispettivam., e questi generano una sottoalgebra di $End(\mathcal{E})$ isomorfa ad $\mathcal{E}$ stessa. Quindi partiamo dalla seguente

<u>Definizione:</u> Per ogni s, t def. $\lambda_s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ e $\rho_t : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ endom. A-lineari t.c.

$$\lambda_s(T_w) = \begin{cases} T_{sw} & \text{se } \ell(sw) > \ell(w) \\ a_s T_w + b_s T_{sw} & \text{se } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

$$\rho_t(T_w) = \begin{cases} T_{wt} & \text{se } \ell(wt) > \ell(w) \\ a_t T_w + b_t T_{wt} & \text{se } \ell(wt) < \ell(w) \end{cases}$$

<u>Lemma 3:</u> Siano $s, t \in S$ e $w \in W$. Se $\ell(swt) = \ell(w)$ e $\ell(sw) = \ell(wt)$ allora $swt = w$, equivalentem. $sw = wt$.

<u>Dim.:</u> Sia $w = s_1 \cdots s_r$ espressione ridotta. Se $\ell(sw) > \ell(w)$

allora $\ell(w) = \ell(swt) < \ell(sw)$ e per la propr. di scambio:

$$swt = \begin{cases} sw' & \text{con } w' < w \quad (\text{cioè } w' \text{ è sottoespr. di } w) \\ w \end{cases}$$

Nel primo caso avremmo $\cancel{s}wt = \cancel{s}w'$ da cui $\ell(wt) < \ell(w)$ che contraddice $\ell(sw) > \ell(w)$. Segue la tesi $swt = w$.

Rimane da esaminare il caso $\ell(sw) < \ell(w)$, ma poss. applicare il caso precedente agli elem. $s, t, \tilde{w} = sw$, concludendo $s\tilde{w}t = \tilde{w}$ cioè $\cancel{s}\cancel{s}wt = sw$.

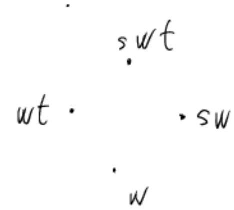
$\square$

<u>Prop.</u>: $\forall s, t \in S$: $\quad \lambda_s \circ \rho_t = \rho_t \circ \lambda_s$.

<u>Dim.</u>: Sia $w \in W$, calcoliamo $\lambda_s \circ \rho_t$ e $\rho_t \circ \lambda_s$ su T_w.

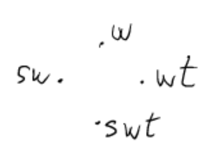
Esaminiamo le lunghezze possibili di w, sw, wt, swt.

a) $\ell(w) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt)$



Allora $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = T_{swt} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$.

b) $\ell(swt) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(w)$



Allora si calcola facilmente $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = a_t a_s T_w + a_t b_s T_{sw} + b_t a_s T_{wt} + b_t b_s T_{sw} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$.

c) $\ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt) = \ell(w)$

$$\begin{array}{cc} w & swt \\ sw & wt \end{array}$$

Per il lemma 3 abb. $wt = sw$ cioè s e t sono coniugati in W, da cui $a_s = a_t$, $b_s = b_t$. Otteniamo

$$\lambda_s(\rho_t(T_w)) = a_t a_s T_w + \underbrace{a_t b_s}_{= a_s b_t} T_{sw} + \underbrace{b_t}_{= b_s} T_{swt} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$$

d) $\ell(wt) < \ell(w) = \ell(swt) < \ell(sw)$

$$\begin{array}{ccc} & sw & \\ w & & swt \\ & wt & \end{array}$$

Abb. $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = a_t T_{sw} + b_t T_{swt} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$.

e) $\ell(sw) < \ell(w) = \ell(swt) < \ell(wt)$

$$\begin{array}{ccc} & wt & \\ w & & swt \\ & sw & \end{array}$$

Qui $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = a_s T_{wt} + b_s T_{swt} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$

f) $\ell(w) = \ell(swt) < \ell(wt) = \ell(sw)$

$$\begin{array}{cc} sw & wt \\ w & swt \end{array}$$

Per il lemma 3, s e t sono coniugati.

Allora $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = \underbrace{a_s}_{= a_t} T_{wt} + \underbrace{b_s}_{= b_t} T_{swt} = \rho_t(\lambda_s(T_w))$.

$\square$

Dim del teorema, parte esistenza: Def. $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{E})$ la sottoalg. generata da $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ e λ_s $\forall s \in S$, e definiamo

$$\varphi: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$\lambda \longmapsto \lambda(T_e)$$

Oss. $\varphi(Id_{\mathcal{E}}) = T_e$, $\varphi(\lambda_s) = \lambda_s(T_e) = T_s \quad \forall s \in S$.

Inoltre φ è un omom. di A-moduli ed è suriettivo perché T_w è nell'immagine $\forall w \in W$, infatti

$T_w = \varphi(\lambda_{s_1} \cdots \lambda_{s_r})$ se $w = s_1 \cdots s_r$ è espr. ridotta.

Va dim. che φ è iniettivo, quindi sia $\lambda \in Ker(\varphi)$, cioè $\lambda(T_e) = 0$. Usiamo induzione su $\ell(w)$ per dim. $\lambda(T_w) = 0 \quad \forall w \in W$, da cui segue $\lambda = 0$.

Se $\ell(w) > 0$ scegliamo $t \in S$ t.c. $\ell(wt) < \ell(w)$, allora ρ_t commuta con ogni elem. di $\mathcal{L}$ quindi

$$\lambda(T_w) = \lambda(T_{wtt}) = \lambda(\rho_t(T_{wt})) = \rho_t(\lambda(T_{wt})) =$$

$$\underset{\text{per induzione}}{=} \rho_t(0) = 0$$

Allora φ è un isom. di A-moduli, possiamo trasferire da $\mathcal{L}$ ad $\mathcal{E}$ la struttura di algebra associativa di $\mathcal{L}$.

Verifichiamo che valgono 1), 2) o equivalentemente 3), 4) in $\mathcal{L}$ ($\Rightarrow$ in $\mathcal{E}$).

Prima di tutto osserviamo che l'isom. φ implica il fatto seguente: $\mathcal{L}$ ha una base fatta da elementi $\lambda_w = \varphi^{-1}(T_w)$ $\forall w \in W$.

Inoltre se $w = s_1 \cdots s_r$ è un'espr. ridotta, allora

$$\varphi(\lambda_{s_1} \circ \dots \circ \lambda_{s_r}) = (\lambda_{s_1} \circ \dots \circ \lambda_{s_r})(T_e) =$$

$$= (\lambda_{s_1} \circ \dots \circ \lambda_{s_{r-1}})(T_{s_r}) = (\lambda_{s_1} \circ \dots \circ \lambda_{s_{r-2}})(T_{s_{r-1} s_r})$$

$$= (\text{per induz.}) = T_{s_1 s_2 \cdots s_r} = T_w = \varphi(\lambda_w)$$

cioè $\lambda_w = \lambda_{s_1} \circ \dots \circ \lambda_{s_r}$, e questo per ogni scrittura ridotta di w.

Verifichiamo 3) e 4) con λ_s, λ_w, λ_{sw}:

3) Supp. $\ell(sw) > \ell(w)$, va verificato $\lambda_s \lambda_w = \lambda_{sw}$.

Fissiamo $w = s_1 \cdots s_r$ un'espr. ridotta. Allora

$\lambda_s \lambda_w = \lambda_s \lambda_{s_1} \cdots \lambda_{s_r} = \lambda_{sw}$ perché $s s_1 \cdots s_r$ è espr. ridotta di sw.

4) Va verificato $\lambda_s^2 = a_s \lambda_s + b_s \lambda_e$, verifichiamolo su T_w con $w \in W$ qualsiasi:

- se $\ell(sw) > \ell(w)$ abb.

$$\lambda_s^2(T_w) = \lambda_s(T_{sw}) = a_s T_{sw} + b_s T_w = (a_s \lambda_s + b_s \lambda_e)(T_w)$$

• se $\ell(sw) < \ell(w)$ abb.

$$\lambda_s^2(T_w) = \lambda_s\left(a_s T_w + b_s T_{sw}\right) = a_s \lambda_s(T_w) + b_s \underbrace{T_s T_{sw}}_{= T_w \text{ per 3)}} =$$

$$= \left(a_s \lambda_s + b_s \lambda_e\right)(T_w).$$

$\square$

<u>Esercizio</u>: $T_w \longmapsto T_{w^{-1}}$ induce un autom. di A-moduli $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, verificare che è un anti-omom. di A-algebre.

Algebre di Hecke a un parametro

<u>Def.</u>: Sia (W, S) un sistema di Coxeter. L'<u>algebra di Hecke</u> (a un parametro) $\mathcal{H}$ è definita come $\mathcal{E}$ scegliendo

$$A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \quad a_s = q-1 \quad b_s = q \quad \forall s \in S.$$

Quindi le relaz. sono
$$T_s T_w = T_{sw} \qquad \text{se } \ell(sw) > \ell(w),$$
$$T_s^2 = (q-1) T_s + q T_e$$

<u>Esercizio</u>: Dim. che $T_s \longmapsto -1 \ \forall s \in S$ induce un omom. $\mathcal{H} \to A$ che manda T_w in $(-1)^{\ell(w)}$

<u>Oss.</u>: T_s è invertibile $\forall s \in S$, infatti $\frac{1}{q} T_s \left(T_s - (q-1) T_e\right) = T_e$.

Quindi T_w è invertibile $\forall w \in W$.

<u>Proposizione:</u> Poniamo $\varepsilon_w = \varepsilon(w)$ e $q_w = q^{\ell(w)}$ per ogni $w \in W$.

Esistono polinomi $R_{x,w} \in \mathbb{Z}[q]$ di grado $\ell(w)-\ell(x)$ con $R_{w,w} = 1$ per ogni $x,w \in W$, tali che

$$\left(T_{w^{-1}}\right)^{-1} = \varepsilon_w q_w^{-1} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x R_{x,w} T_x .$$

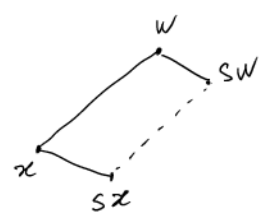
Per la dim. vediamo una versione più forte della prop. di pag 35.

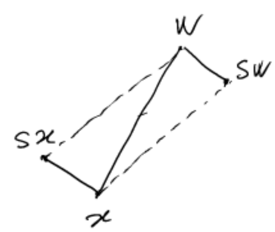
<u>Lemma:</u> Siano $s \in S$, $w \in W$ t.c. $sw < w$, e sia $x \in W$ con $x < w$.

1) Se $sx < x$ allora $sx < sw$.

2) Se $sx > x$ allora $sx \leq w$ e $x \leq sw$.

(Quindi in ogni caso $sx \leq w$.)





<u>Dim.:</u> La condiz. $sw < w$ implica che $sw = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$ dove $s_1 \cdots s_r = w$ è ridotta. Allora anche $w = s \cdot s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$ è ridotta perché è lunga anch'essa $r = \ell(w)$. Per il teo. sulle sottoespressioni e l'ordine di Bruhat, x è una sottoespr. di w. Se il primo fattore s di w non è nella

sottoespressione, allora x è una sottoespr. anche di $sw = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$, da cui $x \leq sw$, e sx è una sottoespr. di w da cui $sx \leq sw$ e vale $sx < sw$ perché $x \neq w$ per ipotesi. Infine $sx < sw < w$, quindi valgono 1) e 2). Supponiamo invece che il primo fattore s di w compaia nella sottoespressione. Allora sx è una sottoespressione di w e anche di sw, da cui $sx < sw$ e $sx < w$. Quindi vale 1), e rimane da verificare solo $x \leq sw$ per 2) supponendo $x < sx$, il che però implica semplicem. $x < sx < sw$ quindi vale 2). $\square$

<u>Dim. della Proposizione</u>: E' vera se $w = e$ e se $w = s \in S$, infatti in quest'ultimo caso vale $\varepsilon_w = -1$, $q_w^{-1} = q^{-1}$, $\varepsilon_e = 1$, e:

$$(T_s)^{-1} = \frac{1}{q} T_s + \frac{1-q}{q} T_e =$$

$$= \frac{-1}{q} \left(\underset{\varepsilon_e}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \underbrace{(q-1)}_{\overset{\shortparallel}{R_{e,w}}} T_e + \underbrace{(-1)}_{\overset{\shortparallel}{\varepsilon_w}} \underbrace{1}_{R_{w,w}} T_s \right)$$

Quindi poniamo intanto $R_{e,s} = q-1 \quad \forall s \in S$.

Procediamo per induzione su $\ell(w)$, assumiamo $\ell(w) > 0$

e scriviamo $w = sv$ per qualche $s \in S$, $v \in W$ con $\ell(v) < \ell(w)$.

Allora $\varepsilon_w = -\varepsilon_v$ e $q_w = q_v q$. Per induzione:

$$\left(T_{w^{-1}}\right)^{-1} = \left(T_{v^{-1}} T_s\right)^{-1} = T_s^{-1} \left(T_{v^{-1}}\right)^{-1} =$$

$$= q^{-1}\left(T_s - (q-1)T_e\right)\left(\varepsilon_v q_v^{-1} \sum_{y \leq v} \varepsilon_y R_{y,v} T_y\right) =$$

$$= \varepsilon_w q_w^{-1} \left((q-1) \sum_{y \leq v} \varepsilon_y R_{y,v} T_y - \sum_{y \leq v} \underbrace{\varepsilon_y R_{y,v} T_s T_y}_{\substack{\parallel \\ X(v,s,y)}} \right) = \ldots$$

Se $\ell(sy) > \ell(y)$ allora $X(v,s,y) = \varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}$,

se $\ell(sy) < \ell(y)$ allora $X(v,s,y) = \underbrace{(q-1)\varepsilon_y R_{y,v} T_y}_{\substack{\text{cancella un termine} \\ \text{della somma precedente}}} + q \varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}$

$$\ldots = \varepsilon_w q_w^{-1} \left(L + M + N \right)$$

dove $L = \sum_{\substack{y \leq v \\ y < sy}} (q-1) \varepsilon_y R_{y,v} T_y$ $\quad M = \sum_{\substack{y \leq v \\ y < sy}} \left(-\varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}\right)$

$$N = \sum_{\substack{y \leq v \\ y > sy}} \left(-q \varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}\right)$$

In tutte queste somme abb. $y < w$ e per il lemma anche $sy \leq w$.

Inoltre, dato un qualsiasi $x < w$, esso appare come $x = y \leq v$ oppure come $x = sy$ con $y \leq v$, per il teorema sulle sottoespressioni.

Quindi i polinomi $R_{x,w}$ esistono in $\mathbb{Z}[q]$, rimane solo da verificare che hanno grado $\ell(w) - \ell(x)$ e che $R_{w,w} = 1$.

Consid. il caso $x \leq w$ con $x > sx$. Allora T_x appare solo in M con $x = sy$ e $y \leq v$, il coefficiente di T_x è $-\varepsilon_y R_{y,v} = \varepsilon_x R_{sx,sw}$ e ha grado $\ell(sw) - \ell(sx) = \ell(w) - \ell(x)$. Se inoltre $x = w$ allora $y = v$ e $R_{v,v} = 1$ per induzione, quindi $R_{w,w} = R_{sx,sw} = R_{y,v} = 1$.

Consid. invece il caso $x \leq w$ e $x < sx$. Qui abb. due possibilità:

a) $\underline{sx < v}$, allora T_x appare in L con $x = y \leq v$ e in N con $x = sy'$, $y' = sx \leq v$. Insieme fanno il coeff.

$$(q-1)\varepsilon_x R_{x,v} - q\,\varepsilon_{sx} R_{sx,v}$$

per T_x. Osserviamo che $q R_{sx,v}$ ha grado $\ell(v) - \ell(sx) + 1 = \ell(w) - \ell(x) - 1$ e $(q-1) R_{x,v}$ ha grado $\ell(v) - \ell(x) + 1 = \ell(w) - \ell(x)$ quindi il coeff. di T_x ha grado $\ell(w) - \ell(x)$.

b) $sx \nleq v$, allora T_x appare solo in L con coeff. $\varepsilon_x (q-1) R_{x,v}$ che ha grado $\ell(v) - \ell(x) + 1 = \ell(w) - \ell(x)$ (oss. $x \leq v$ per il lemma prec.). $\square$

Esercizio: Calcolare $R_{x,w}$ $\forall x,w$ con $W=S_3$.

L'involuzione $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Definiamo $\iota : \mathbb{Z}[q,q^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ e $\iota(T_w) = (T_{w^{-1}})^{-1}$.
$$q \longmapsto q^{-1}$$

Proposizione: ι induce un'involuzione di anelli $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Dim.: Se ι si estende a un omom. di anelli allora $\iota^2 = Id$ perché
$$\iota(\iota(T_w)) = \iota((T_{w^{-1}})^{-1}) = \iota(T_{w^{-1}})^{-1} = ((T_w)^{-1})^{-1} = T_w, \text{ e } \iota^2|_A = Id_A.$$

Rimane da dim. che $\iota(T_u)\iota(T_w) = \iota(T_u T_w)$ $\forall w,u \in W$.

Prima verifichiamo quest'uguaglianza per $u=s\in S$. Se $\ell(sw)>\ell(w)$ allora $\iota(T_s T_w) = \iota(T_{sw}) = (T_{w^{-1}s})^{-1} = T_s^{-1}(T_{w^{-1}})^{-1} = \iota(T_s)\iota(T_w)$.

Supp. allora $\ell(sw)<\ell(w)$, scriviamo $v=(sw)^{-1}$, $w^{-1}=vs$:
$$\iota(T_s T_w) = \iota(q T_{sw} + (q-1)T_w) = q^{-1} T_v^{-1} + (q^{-1}-1)(T_{w^{-1}})^{-1} = \dots$$

Usiamo $q^{-1}-1 = -q^{-1}(q-1)$, $T_{w^{-1}} = T_{vs} = T_v T_s$, e la formula per T_s^{-1} e otteniamo
$$\dots = q^{-2}(q^2-q+1)T_v^{-1} - (q-1)q^{-2} T_s T_v^{-1}$$

D'altronde $\iota(T_s)\iota(T_w) = T_s^{-1}(T_{w^{-1}})^{-1} = T_s^{-2} T_v^{-1}$

e sostituendo $\left(T_s^{-1}\right)^2$ otteniamo la stessa formula di prima.

Segue $\iota(T_s T_w) = \iota(T_s)\iota(T_w)$.

Concludiamo allora per induzione su $\ell(w')$ che $\iota(T_{w'}T_w) = \iota(T_{w'})\iota(T_w)$ anche per $\ell(w')>1$: infatti basta scegliere $s\in S$ t.c. $\ell(w's)<\ell(w')$ e abb.

$$\iota(T_{w'}T_w) = \iota\Big(T_{w's}\underbrace{T_sT_w}_{\substack{\text{comb. lin.}\\ \text{di elem. del}\\ \text{tipo } T_x \text{ con } x\in W}}\Big) \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{per induz.}}}{=} \iota(T_{w's})\,\iota(T_sT_w) =$$

$$= \iota(T_{w's})\,\iota(T_s)\iota(T_w) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per induz.}}}{=} \iota(T_{w's}T_s)\,\iota(T_w) =$$

$$= \iota(T_{w'})\,\iota(T_w).$$

$\square$

Esercizio: Si definisca in modo analogo a ι un'involuzione $\sigma: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ t.c. $\sigma(q)=q^{-1}$, $\sigma(T_w)=\varepsilon_w q_w^{-1}T_w$.
Inoltre dim. che $\sigma\circ\iota = \iota\circ\sigma$.

Polinomi di Kazhdan-Lusztig

Troviamo una base $\{C_w\}$ di $\mathcal{H}$ come A-modulo fatta di elementi fissati da ι. Prima però rimpiazziamo $A=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

con $A = \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$. Allora osserviamo che

$$T_s^{-1} = q^{-1} T_s - (1-q^{-1}) T_e$$

implica $\iota(T_s - q T_e) = \iota(T_s) - q^{-1}\iota(T_e) = q^{-1} T_s - (1-q^{-1}) T_e -$

$$q^{-1} T_e = q^{-1}(T_s - q T_e)$$

da cui $\iota(C_s) = C_s$ ponendo $C_s = q^{-1/2}(T_s - q T_e)$.

Però è difficile creare elem. ι-invarianti semplicemente moltipl. questi C_s e sperare di ottenere qualcosa del tipo C_w cioè che dipenda solo da $w \in W$. Ad es. può succedere che $s, t \in S$ soddisfino $sts = tst$ ma $C_s C_t C_s \neq C_t C_s C_t$.

Però possiamo def. C_w come comb. lin. di T_x con $x \leq w$.

<u>Teorema</u>: Esiste un'unica scelta di elem. $C_w \in \mathcal{H}$ con $w \in W$ tali che:

a) $\iota(C_w) = C_w$

b) $C_w = \varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,w}(q^{-1}) T_x$

dove $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ soddisfa $P_{w,w} = 1$ $\forall w \in W$ e $P_{x,w}$ ha grado $\leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(x) - 1)$ se $x < w$.

Def.: I polinomi $P_{x,w}$ sono detti polinomi di Kazhdan-Lusztig.

Per convenzione poniamo $P_{x,w} = 0$ se $x \not\leq w$.

Esercizio: Verificare che $C_e = T_e$, C_s come prima, e

$C_{st} = C_s C_t$ soddisfano a) e b) del teorema.

Verificare anche l'unicità, per questi elementi.

Esercizio: Per $W = S_3$ verificare $P_{x,w} = 1$ $\forall x, w$.

Dim. teo.: parte unicità

Dimostriamo l'unicità dei polinomi di K.-L., segue l'unicità di C_w.

Fissiamo w e procediamo per induzione su $\ell(w) - \ell(x)$: la base dell'induzione è $\ell(w) = \ell(x)$ con $x \leq w$, da cui $w = x$. L'unicità è assicurata dalla richiesta $P_{w,w} = 1$ $\forall w \in W$.

Assumiamo per induzione che $P_{y,w}$ sia univocam. det. per ogni y t.c. $x < y \leq w$, e scriviamo

$$C_w = \sum_{y \leq w} a(y,w) \overline{P}_{y,w} T_y$$

dove $\overline{P}_{y,w}(q) = P_{y,w}(q^{-1})$ e $a(y,w) = \varepsilon_w \varepsilon_y q_w^{1/2} q_y^{-1}$.

Applichiamo ι e usiamo la formula che abbiamo per $(T_{y^{-1}})^{-1}$ ottenendo

$$C_w = \varepsilon_w q_w^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{x,y \text{ t.c.} \\ x \le y \le w}} \varepsilon_x R_{x,y} P_{y,w} T_x$$

Fissato x, confrontiamo il coeff. di T_x in questa espressione con il coeff. dato dalla formula del teorema:

$$\cancel{\varepsilon_w} q_w^{1/2} \cancel{\varepsilon_x} q_x^{-1} \overline{P}_{x,w} = \cancel{\varepsilon_w} q_w^{-1/2} \sum_{\substack{y \text{ t.c.} \\ x \le y \le w}} \cancel{\varepsilon_x} R_{x,y} P_{y,w}$$

$$q_w^{1/2} q_x^{-1/2} \overline{P}_{x,w} = q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{1/2} \sum_{x \le y \le w} R_{x,y} P_{y,w}$$

Ric. $R_{x,x} = 1$, quindi spostiamo l'addendo con $y=x$ a sinistra:

$$\overbrace{q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-\frac{1}{2}} \overline{P}_{x,w}}^{=\mathrm{I}} - \overbrace{q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{\frac{1}{2}} P_{x,w}}^{=\mathrm{II}} = q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{\frac{1}{2}} \sum_{x < y \le w} R_{x,y} P_{y,w}$$

Abbiamo supposto $P_{y,w}$ univocam. det. nella somma a destra, esaminiamo I e II. Abb. $q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-\frac{1}{2}} = q^{\frac{\ell(w)}{2}} \cdot q^{\frac{-\ell(x)}{2}} = q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}$.

D'altronde $P_{x,w}$ è un pol. in q di grado $d \le \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$, quindi I è un polinomio di Laurent con gradi compresi fra

$$\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2} + 0 \ (>0) \quad \text{e} \quad \frac{\ell(w)-\ell(x)}{2} - d \ge \frac{\ell(w)-\ell(x)}{2} - \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}$$

$= \frac{1}{2}$

quindi I è un polinomio in $q^{1/2}$ senza termine noto.

Analogam. II è un polinomio in $q^{-1/2}$ senza termine noto, quindi I - II determina univocam. I e II.

$\square$

<u>Esercizio</u>: Supp. $\ell(w) = \ell(x)+1$. Dedurre dalle formule prec. che

$$R_{x,w} = q-1 \quad \text{e} \quad P_{x,w} = 1 .$$

<u>Dim. teo.: parte esistenza</u>: Poniamo $P_{x,w} = 0$ se $x \nleq w$.

Notazione: se $P_{x,w}$ ha grado massimo $= \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$ allora scriviamo $x \prec w$, e denotiamo con $\mu(x,w) \in \mathbb{Z}$ il coeff. direttore di $P_{x,w}$.

In questo caso chiaramente $\ell(w)-\ell(x)-1 \in 2\mathbb{Z}$, da cui $\ell(w)$ e $\ell(x)$ non hanno stessa parità, da cui segue $\varepsilon_w = -\varepsilon_x$.

Procediamo per induzione su $\ell(w)$, ric. che abb. già determinato C_s $\forall s \in S$. Dato $w \in W$ t.c. $\ell(w) > 1$, scegliamo $s \in S$ t.c. $\ell(sw) < \ell(w)$ e poniamo $v = sw$: stiamo assumendo che C_v è stato già costruito. Oss. $a(x,w) = -q^{1/2} a(x,v)$ e poniamo

$$C_w = C_s C_v - \sum_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) C_z$$

Chiaramente $\iota(C_w) = C_w$. Inoltre ric. $C_s = q^{-\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}} T_e$, quindi per induzione è vero che $C_w \in \mathrm{span}_A \{ T_x \mid x \leq w \}$. Esaminiamo i coefficienti, iniziando dal coeff. di T_w in C_w: dalla def. di C_w vediamo che T_w può comparire solo come $T_s T_v$ nel prodotto $C_s C_v$, e il coeff. è

$$q^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{a(v,v) \overline{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{P_{v,v}}}}}_{\text{coeff. di } T_v \text{ in } C_v} = q^{-\frac{1}{2}} q_v^{\frac{1}{2}} q_v^{-1} = q_w^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= a(w,w) \overline{P_{ww}}$$

ponendo $P_{w,w} = 1$ e ric. $a(w,w) = \varepsilon_w \varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} q_w^{-1} = q_w^{-\frac{1}{2}}$.

Quindi il coeff. di T_w in C_w è quello voluto.

Fissiamo ora $x < w$. L'elem. T_x può comparire in C_w in $C_s C_v$ in 4 modi:

1) in $T_e C_v = C_v$ (se $x \leq v$)
2) in $T_s C_v$ come $T_s \cdot T_x = q T_{sx} + (q-1) T_x$ se $x \leq v$ e $sx < x$
3) in $T_s C_v$ come $T_s \cdot T_{sx} = T_x$ se $x \leq v$ e $sx < x$
4) in $T_s C_v$ come $T_s \cdot T_{sx} = q T_x + (q-1) T_{sx}$ se $x < sx \leq v$

In ogni caso dobb. avere $x \leq v$. Se $x < sx \leq v$ allora abb. i contributi di 1) e 4) nel coeff. di T_x in $C_s C_v$:

$$1) \rightsquigarrow -q^{\frac{1}{2}} a(x,v) \overline{P}_{x,v} = a(x,w) \overline{P}_{x,v}$$

$$4) \rightsquigarrow q^{-\frac{1}{2}} q \underbrace{a(sx,v) \overline{P}_{sx,v}}_{\substack{\text{è il coeff. di } T_{sx} \\ \text{in } C_v}} = -q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-1} a(x,v) \overline{P}_{sx,v} =$$

$$= q^{-1} a(x,w) \overline{P}_{sx,v}$$

cioè complessivamente $a(x,w)\left(q^{-1}\overline{P}_{sx,v} + \overline{P}_{x,v}\right)$.

Invece se $sx < x \leq v$ abb. i contributi di 1) e 2) e 3):

1) $\rightsquigarrow$ già calcolato

$$2) \rightsquigarrow (q-1) q^{-\frac{1}{2}} a(x,v) \overline{P}_{x,v} = (q^{-1} - 1) a(x,w) \overline{P}_{x,v}$$

cancella 1)

$$3) \rightsquigarrow q^{-\frac{1}{2}} a(sx,v) \overline{P}_{sx,v} = -q^{-\frac{1}{2}} q\, a(x,v) \overline{P}_{sx,v} = a(x,w) \overline{P}_{sx,v}$$

cioè complessivam.

$$a(x,w)\left(\overline{P}_{sx,v} + q^{-1} \overline{P}_{x,v}\right)$$

Invece il coeff. di T_x in $-\sum \mu(z,v) C_z$ è

$$-\sum_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v)\, a(x,z)\, \overline{P}_{x,z}$$

Ora $a(x,z) = \varepsilon_z \varepsilon_w q_z^{\frac{1}{2}} q_w^{-\frac{1}{2}} a(x,w)$ ma se $z \prec v = sw$ allora $\ell(z)$ e $\ell(w)$ hanno entrambi parità diversa da $\ell(v)$, cioè $\varepsilon_z \varepsilon_w = 1$.

Allora abb.

$$P_{x,w} = q^{1-c} P_{sx,v} + q^c P_{x,v} - \sum_{\substack{z<v \\ sz<z}} \mu(z,v)\, q_z^{-\frac{1}{2}} q_w^{\frac{1}{2}} P_{x,z} \qquad (*)$$

dove poniamo $c=0$ se $x<sx$ e $c=1$ se $x>sx$.

La stima sul grado $\le \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$ è ovvia per i termini del tipo $q_z^{-\frac{1}{2}} q_w^{\frac{1}{2}} P_{x,z}$ (assumendola per induzione per $P_{x,z}$) con $x \neq z$.

Se $c=1$ allora è da consid. il grado di $P_{sx,v}$ che è

$$\le \frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(sx)-1) = \frac{1}{2}\left(\ell(w)-1-(\ell(x)-1)-1\right) = \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$$

Se $c=0$ il grado di $q P_{sx,v}$ è

$$\le \frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(sx)-1)+1 = \frac{1}{2}\left(\ell(w)-1-\ell(x)-\cancel{1}-\cancel{1}\right)\cancel{+1} = \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$$

Se $c=0$ il grado di $P_{x,v}$ è $\le \frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(x)-1) < \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$

Se $c=1$ il grado di $q P_{x,v}$ va analizzato. È sicuramente

$$\le \frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(x)-1)+1 = \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x))$$ che eccede di $\frac{1}{2}$

la stima voluta. Se $q P_{x,v}$ davvero eccede la stima voluta, allora $q P_{x,v}$ ha grado proprio $\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x))$ e $P_{x,v}$ ha grado proprio $\frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(x)-1)$. In questo caso $x<v$ e $sx<x$ quindi x compare anche come z nella formula $(*)$, dando il contributo $-\mu(x,v)\, q_x^{-\frac{1}{2}} q_w^{\frac{1}{2}} P_{x,x} = -\mu(x,v)\, q^{\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x))}$

il quale cancella il termine di grado più alto di $q^{P_{x,v}}$.

Infine, se $x = z$ compare come addendo nella somma in $(*)$, allora siamo nella situazione appena descritta, quindi per il motivo di prima il termine $-\mu(x,v)\, q_x^{-\frac{1}{2}} q_w^{\frac{1}{2}} P_{x,x}$ che ha grado „troppo alto" viene cancellato dal grado massimo di $q^{P_{x,v}}$.

$\square$

<u>Esercizio</u>: Usare $(*)$ per dim. che $P_{x,w}(0) = 1 \ \forall x \leq w$, e che

$$P_{x,w} = 1 \quad \text{se} \quad \ell(w) - \ell(x) \leq 2.$$